Lösung der Aufgaben zum Heron-Verfahren

1. Machen Sie sich mit dem Heron – Verfahren vertraut. Wie kommt die Iterationsgleichung zustande?

2. Berechnen Sie $\sqrt{14}$ nach dem Heron – Verfahren auf 7 Stellen nach dem Komma genau. Beginnen Sie mit dem Startwert 6. Füllen Sie dazu folgende Tabelle aus:

Näherungswerte für $\sqrt{14}$ Startwert: $x_0 = 6$; Angabe auf 7 Dezimalen genau

n	x_n	x_{n+1}
0	6	**4,1666667**
1	4,1666667	**3,7633333**
2	3,7633333	**3,7417198**
3	3,7417198	**3,7416574**
4	3,7416574	**3,7416574**

3. Berechnen Sie die Näherungswerte für $\sqrt{14}$ (Startwert $x_0 = 6$) mit DERIVE.

- Tragen Sie die exakten Näherungswerte x_1, x_2 und x_3 in die nebenstehende Tabelle ein.

- Welche Stellenzahl muss man beim Approximieren mindestens einstellen, um die Näherungswerte auf 7 Stellen nach dem Komma genau angeben zu können?

Stellenzahl: 9

Näherungswerte für $\sqrt{14}$; Startwert: $x_0 = 6$

n	x_n
0	**6**
1	$\frac{25}{6}$
2	$\frac{1129}{300}$
3	$\frac{2534641}{677400}$

4. Berechnen Sie die Näherungswerte für $\sqrt{216}$ mit DERIVE auf 15 Stellen nach dem Komma genau.

$$\sqrt{216} \approx \mathbf{14.696938456699069}$$

5. Variieren Sie bei der Berechnung von $\sqrt{216}$ die Startwerte. Welchen Einfluss hat der Startwert auf die Berechnung? Wie sollte man den Startwert wählen?

Je näher der Startwert bei $\sqrt{216}$ liegt, desto weniger Iterationen sind notwendig, um $\sqrt{216}$ auf eine bestimmte Stellenzahl genau zu berechnen. Man sollte die Berechnungen möglichst mit schon bekannten guten Näherungswerten beginnen.

6. Überprüfen Sie mit DERIVE die 42. Stelle von $\sqrt{2}$ (siehe Gedicht von Prof. Aigner „Die Irrationale“).

42.-Stelle von $\sqrt{2}$: **1**

7. Berechnen Sie die 1000. Stelle von $\sqrt{2}$. (Nutzen Sie den Befehl **Iterate**.)

1000.-Stelle von $\sqrt{2}$: **2**

<u>Zusatz:</u>

1. Bestimmen Sie $\sqrt[3]{16}$ auf 100 Stellen genau. Schreiben Sie die letzen 10 Stellen auf. Benutzen Sie die Iterationsformel $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$ von Heron zur näherungsweisen Berechnung der $\sqrt[3]{a}$.

   2.5198420997897463295344212145564567011405029294030159601639502243105993530279189674587931 24

8	7	2	5	1	0	1	8	8	3
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Welche Zahl kann man möglicherweise mit folgender Iterationsvorschrift von Heron bestimmen?

   $x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{35}{x_n^3}\right)$ **Zahl:** $\sqrt[4]{35}$ **≈ 2,432299279**

3. Verfolgen Sie den Gedanken von Heron. Geben Sie eine Iterationsvorschrift für die $\sqrt[11]{a}$ an.

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(10x_n + \frac{a}{x_n^{10}}\right)$$

4. Geben Sie eine Iterationsvorschrift für die $\sqrt[k]{a}$ an.

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{(k-1)}}\right)$$