Lösung der Aufgaben zum Heron-Verfahren

1. Berechnen Sie die Näherungswerte für $\sqrt{7}$ (Startwert $x_0 = 2$; 4 Iterationen) mit DERIVE.

   - Tragen Sie die exakten Näherungswerte x_1, x_2, x_3 und x_4 in die nebenstehende Tabelle ein.
   - Überprüfen Sie die Näherungswerte der Hausaufgabe.
     $x_0 = 2$; $x_1 = 2,75$;
     $x_2 = 2,64772727$; $x_3 = 2,64575204$;
     $x_4 = 2,64575131$; $x_5 = 2,64575131$

     $\sqrt{7} \approx$ **2,6457513**

   - Welche Stellenzahl muss man beim Approximieren mindestens einstellen, um $\sqrt{7}$ auf 7 Dezimalen genau angeben zu können?

     Stellenzahl: 9

Näherungswerte für $\sqrt{7}$; Startwert: $x_0 = 2$

n	x_n
0	**2**
1	$\frac{11}{4}$
2	$\frac{233}{88}$
3	$\frac{108497}{41008}$
4	$\frac{23543191457}{8898489952}$

2. Berechnen Sie $\sqrt{216}$ mit DERIVE auf 15 Stellen nach dem Komma genau. Variieren Sie bei der Berechnung die Startwerte.

   mindestens notwendige Stellenzahl beim Approximieren: 18

   $\sqrt{216} \approx$ **14,6 9 6 9 3 8 4 5 6 6 9 9 0 6 9**
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

   (14.6969384566990685)

   $\sqrt{216}$ **auf 15 Dezimalen genau**

Startwert:	2	12.6	14.7	21.6	216
Anzahl der notwendigen Iterationen:	**8**	**4**	**3**	**4**	**9**

   Welchen Einfluss hat der Startwert auf Anzahl der notwendigen Iterationen?
   Wie sollte man den Startwert wählen?

   Je näher der Startwert bei $\sqrt{216}$ liegt, desto weniger Iterationen sind notwendig, um $\sqrt{216}$ auf eine bestimmte Stellenzahl genau zu berechnen. Man sollte die Berechnungen möglichst mit schon bekannten guten Näherungswerten beginnen.

3. Überprüfen Sie mit DERIVE die 42. Stelle von $\sqrt{2}$ (siehe Gedicht von Prof. Aigner „Die Irrationale“).

   42.-Stelle von $\sqrt{2}$: **1**

4. Berechnen Sie die 1000. Stelle von $\sqrt{2}$. (Nutzen Sie den Befehl **Iterate**.)

   1000.-Stelle von $\sqrt{2}$: **2**

5. Bestimmen Sie $\sqrt{51}$ auf 1000 Stellen genau. Schreiben Sie die letzen 10 Stellen auf. (Runden!)

Die ersten 1001 Stellen von $\sqrt{51}$ (Stellenzahl = 1002)

7.14142842854284999799939981136726527876617115990273383320843088276582040644002188625898821353282041823448963226050852152958154660963224659467878396869162444703578931307122783040548544975028922336995909196014166151326037502291451060955486551303937574069918136182831088648094352145313656605536784580373667282197820499396941918653541090675451732310752674500109280746962205604372419139245964906372078667421495331588160158729896395378497144095431865492727465313942063606125483169369558373785661287684270940759740429613041257484147423422720246679004998265680308092989018932448424663287008669048730562544667072328150743391369802398303431975948765856334202870388148049976507881558903423439162631508941896232644504711068288542246192955158510692906471267006254045072394106015079802075120737569205154932738857869346878576614661330712432321007510419179088110969222186751469741310619778297684798009686020075226414341866608755707724519486254312715019437865433382209238217800356600847774439936136081119974438875922605

3	8	8	7	5	9	2	2	6	1
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

6. Bestimmen Sie $\sqrt[3]{16}$ auf 100 Stellen genau. Schreiben Sie die letzen 10 Stellen auf. Benutzen Sie die Iterationsformel $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$ von Heron zur näherungsweisen Berechnung der $\sqrt[3]{a}$.

2.519842099789746329534421214556456701140502929403015960163950224310599353027918967458793124

8	7	2	5	1	0	1	8	8	3
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

7. Welche Zahl kann man möglicherweise mit folgender Iterationsvorschrift von Heron bestimmen?

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{35}{x_n^3}\right)$$

Zahl: $\sqrt[4]{35} \approx 2{,}432299279$

8. Verfolgen Sie den Gedanken von Heron. Geben Sie eine Iterationsvorschrift für die $\sqrt[11]{a}$ an.

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(10x_n + \frac{a}{x_n^{10}}\right)$$

9. Geben Sie eine Iterationsvorschrift für die $\sqrt[k]{a}$ an.

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{(k-1)}}\right)$$

10. Berechnen Sie die 100. Stelle von $\sqrt[18]{136}$.

100. Stelle von $\sqrt[18]{136}$: **4**