

Definition Zahlenfolge	Eine Zahlenfolge (a_n) ist eine Funktion mit einer Menge natürlicher Zahlen als Definitionsbereich und einer Menge reeller Zahlen als Wertebereich. Die Glieder der Zahlenfolge (a_n) bezeichnet man mit a_1, a_2, a_3, \dots $k, m, n \dots$ Argument a_1, a_2, a_3, \dots erstes, zweites, ... Folgeglied a_n oder a_k n-tes oder k-tes Folgeglied (a_n) oder (a_k) oder (a_1, a_2, a_3, \dots) gesamte Folge	
Bildungsvorschriften	rekursive Zuordnungsvorschrift: Jedes Glied der Zahlenfolge wird aus vorangehenden Gliedern gewonnen. Benötigte Anfangsglieder müssen angegeben werden. explizite Zuordnungsvorschrift: Funktionsgleichung, mit der sich jedes Glied unmittelbar durch Einsetzen berechnen lässt.	
Definition arithmetisch, geometrisch	Eine Zahlenfolge (a_n) heißt arithmetische Folge genau dann, wenn es eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} = a_n + d$. Die Zahl d heißt Differenz der arithmetischen Zahlenfolge.	Eine Zahlenfolge (a_n) heißt geometrische Zahlenfolge genau dann, wenn es eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ ($q \neq 0$) gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ Die Zahl q heißt Quotient der geometrischen Zahlenfolge.
Satz expl. BV arithmetisch, geometrisch	Wenn (a_n) eine arithmetische Folge ist, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	Wenn (a_n) eine geometrische Folge ist, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Definition Monotonie	(a_n) sei eine Zahlenfolge. (a_n) heißt streng monoton wachsend genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$ (a_n) heißt streng monoton fallend genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$ (a_n) heißt monoton wachsend genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$ (a_n) heißt monoton fallend genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$ (a_n) heißt alternierend genau dann, wenn das Vorzeichen von Glied zu Glied wechselt. \Leftrightarrow Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$	
Definition Schranken	(a_n) sei eine Zahlenfolge. (a_n) heißt nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \leq s$. Die Zahl s heißt obere Schranke von (a_n) . (a_n) heißt nach unten beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \geq s$. Die Zahl s heißt untere Schranke von (a_n) . (a_n) heißt beschränkt genau dann, wenn (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist.	
Definition Grenzwert	Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Die ε-Umgebung von a heißt das offene Intervall $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[= \{y \in \mathbb{R} a-\varepsilon < y < a+\varepsilon\}$ Die Zahl $g \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) , wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle (alle, bis auf endlich viele) Zahlenfolgeglieder von (a_n) in der ε -Umgebung von g liegen, d.h., dass die Betragsungleichung $ a_n - g < \varepsilon$ ab einem bestimmten n immer erfüllt ist. Eine Zahlenfolge heißt konvergent , wenn sie einen Grenzwert besitzt. Eine Zahlenfolge heißt divergent , wenn sie keinen Grenzwert besitzt. Eine Zahlenfolge, die die Zahl Null als Grenzwert hat, heißt Nullfolge .	
Satz: Eindeutigkeit des Grenzwertes	Eine Zahlenfolge kann höchstens einen Grenzwert besitzen. Beweisidee: (indirekter Beweis) Annahme: „Die Zahlenfolge besitzt zwei Grenzwerte g_1 und g_2 .“ führt zum Widerspruch	
Satz Grenzwertsätze	Die Zahlenfolge (a_n) konvergiere gegen g_1 , die Zahlenfolge (b_n) konvergiere gegen g_2 . Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_1 \pm g_2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_1 \cdot g_2 \quad b_n \neq 0 \text{ und } g_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{g_1}{g_2}$	

Definition Partialsummen Partialsummen- folge	<p>Ist $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots)$ eine Zahlenfolge, so bezeichnet man die Zahlen</p> $s_1 = a_1$ $s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$ <p>...</p> $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = s_{k-1} + a_k$ <p>als Partialsummen (Teilsommen) der Folge (a_n). k-te Partialsumme: $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$</p> <p>Die Folge $(s_k) = (s_1; s_2; \dots; s_k)$ heißt Partialsummenfolge von (a_n). <u>rekursive Definition:</u> $s_1 = a_1; s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$</p>	
Satz Partialsumme arithmetisch, geometrisch	<p>$(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots)$ sei eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz d.</p> <p>Für die k-te Partialsumme gilt: $s_k = \sum_{i=1}^k a_i = ka_1 + \frac{k(k-1)d}{2} = k \frac{a_1 + a_k}{2}$.</p>	<p>(a_n) sei eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten $q \neq 1$.</p> <p>Für die k-te Partialsumme gilt: $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$.</p> <p>$(a_n)$ sei eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten $q=1$.</p> <p>Für die k-te Partialsumme gilt: $s_k = k \cdot a_1$.</p>
Definition (Unendliche) Reihe	<p>(a_n) sei eine Zahlenfolge. Die Folge der Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) heißt (unendliche) Reihe.</p> <p>Schreibweise: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$</p> <p>Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert.</p> <p>Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen s, man schreibt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Den Wert s nennt man Summe der Reihe.</p> <p>Eine nichtkonvergente Reihe wird divergent genannt.</p> <p><u>Achtung:</u> Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen: Es bezeichnet die Partialsummenfolge und den Grenzwert der Partialsummenfolge.</p>	
Satz Konvergenz- bedingung für Reihen	<p>Ist (a_n) eine Zahlenfolge und gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, so ist (a_n) eine Nullfolge.</p> <p>(Notwendige Konvergenzbedingung: Ist (a_n) keine Nullfolge, so divergiert die Reihe.) (Keine hinreichende Bedingung: Ist (a_n) eine Nullfolge, so muss die Reihe nicht zwangsläufig konvergieren. (Bsp.: harmonische Reihe))</p>	
Satz Reihe arithmetisch, geometrisch	<p>Arithmetische Reihen sind stets divergent.</p>	<p>Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ konvergiert genau dann, wenn $q < 1$ ist.</p> <p>Sie hat dann die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$.</p>