<u>Definitionen und Sätze:</u> Stochastik

<u>Zufallsexperiment</u>
Ein ***Vorgang mit zufälligem Ergebnis*** (Zufallsexperiment) ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:
1. Er besitzt mehrere mögliche Ergebnisse
2. Das Ergebnis kann vor Ablauf des Experimentes nicht vorhergesagt werden.

<u>Ergebnismenge Ω</u>
Eine Menge Ω heißt ***Ergebnismenge*** eines Zufallsexperiments, wenn jedem möglichen Ergebnis genau ein Element aus Ω zugeordnet ist.

<u>Ereignis, Eintreffen eines Ereignisses, Elementar- und Gegenereignis, unmögliches und sicheres Ereignis, unvereinbar</u>
Eine Teilmenge A einer Ergebnismenge Ω heißt ***Ereignis*** A.
Das Ereignis A tritt ein, wenn für das eintreffende Ergebnis des Zufallsexperiments gilt: $e \in A$.
- Einelementige Teilmenge: ***Elementarereignis*** ($|\Omega| = n \Rightarrow$ Es gibt n Elementarereignisse.)
- Leere Teilmenge: ***unmögliches Ereignis*** $A = \emptyset$
- Gesamte Menge Ω: ***sicheres Ereignis*** $A = \Omega$
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$: ***Gegenereignis*** von A
- Zwei Ereignisse A und B heißen ***unvereinbar***, wenn gilt: $A \cap B = \emptyset$.

<u>Ereignisraum</u>
Die Menge aller Teilmengen von Ω heißt ***Ereignisraum*** 2^{Ω}.

<u>Anzahl der Elemente des Ereignisraums</u> (Anzahl unterschiedlicher Ereignisse)
Besitzt eine Ergebnismenge Ω genau n Elemente ($|\Omega| = n$), so gibt es 2^n unterschiedliche Teilmengen von Ω.

(Es gibt 2^n unterschiedliche Ereignisse. Der Ereignisraum hat 2^n unterschiedliche Elemente.)

<u>Wahrscheinlichkeit, W.-verteilung eines Zufallsexperiments, W. eines Ereignisses</u>
Ist jedem der Ergebnisse eines Zufallsexperiments mit $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ eine reelle Zahl $P(e_i)$ so zugeordnet, dass
1. $\forall$ i: $0 \leq P(e_i)$
2. $P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1$ gilt,

dann heißen die Zahlen $P(e_i)$ ***Wahrscheinlichkeiten***. (P von probability)

Eine Funktion P, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***.
Ist $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ mit $a_i \in \Omega$ (i = 1, …, r) ein Ereignis, dann ist
3. $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_r)$

die ***Wahrscheinlichkeit des Ereignisses*** A.
Für das unmögliche Ereignis setzt man $P(\emptyset) = 0$.

<u>Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten</u>
Ω sei die Ergebnismenge eines Vorgangs mit zufälligem Ergebnis. A, B, C seien Ereignisse: $A, B, C \subseteq \Omega$
- Für das sichere Ereignis gilt: $P(\Omega) = 1$.
- Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- A und B ***unvereinbar*** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Sind die Ereignisse A und B ***stochastisch unabhängig***, dann gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- ***Additionssatz:*** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Gleichverteilung</u>
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die jedem der möglichen Ergebnisse $e_1, ..., e_n$ eines Zufallsexperiments die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet, nennt man ***Gleichverteilung***.

<u>Laplace - Experiment</u>
Bei n möglichen Ergebnissen gilt $P(e_i) = \frac{1}{n}$ für alle i. Das zugehörige Zufallsexperiment heißt ***Laplace - Experiment***.

<u>Berechnung einer Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung</u>
Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Gleichverteilung, so gilt für die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl} \text{ der Ergebnisse, bei denen A eintritt}}{\textit{Anzahl} \text{ aller möglichen Ergebnisse}}$$

Pfadregeln beim Baumdiagramm

Produktregel: (1. Pfadregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades im Baumdiagramm.

Summenregel: (2. Pfadregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller der Pfade, die für dieses Ereignis günstig sind.

Verzweigungsregel: (3. Pfadregel)
Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von ein und demselben Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.

Zufallsgröße

Eine Funktion X: $\Omega \to R$, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zufallsgröße.

diskrete Zufallsgröße

Eine ZG X, die nur endlich viele Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ besitzt, heißt diskrete ZG.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ZG

Die Funktion, $x_i \to P(X = x_i)$ mit i = 1, 2, ..., n heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung der ZG X.

Verteilungsfunktion

Die Funktion F mit $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in R$, die jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet, heißt Verteilungsfunktion von X.

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

X sei eine endliche ZG, die die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, ..., $P(X = x_n)$ annimmt.

Erwartungswert Die Kenngröße $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ heißt Erwartungswert von X.

Varianz Der Erwartungswert der quadratischen Abweichung $(X - \mu)^2$ von X zum Erwartungswert von X heißt Varianz von X. (μ = E(X)) $Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung Die Wurzel aus der Varianz von X heißt Standardabweichung (Streuung) von X: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Rechenregeln für Erwartungswerte und Varianzen:

X, Y, $X_1, X_2, ..., X_n$ seien Zufallsgrößen; a, b seien reelle Zahlen

- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$ $\quad Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ im allgemeinen: $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$
- $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$
- ***Berechnung der Varianz:*** $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$ (μ = E(X))
- X, Y ***unabhängig*** $\Rightarrow$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ $\quad Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $X_1, X_2, ..., X_n$ paarweise voneinander unabhängig $\Rightarrow$ $Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$

Bernoulli – Versuch

Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg 1 bzw. Misserfolg 0) heißt ***Bernoulli – Versuch***.

Bernoullikette

Ein Zufallsexperiment, bei dem ein Bernoulli – Versuch n-mal so wiederholt wird, dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg q (q = 1 – p) nicht ändern, heißt ***Bernoullikette***.
(äquivalent: Die einzelnen Versuche müssen voneinander unabhängig sein.; Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen)

Binomialverteilung

Eine ZG X mit den Werten 0, 1, ..., n heißt ***binomialverteilt*** mit den Parametern n und p, wenn gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ mit k=0,1, ..., n.}$$

Die zu X gehörende Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{n,p}$ nennt man ***Binomialverteilung*** mit den Parametern n und p.

Erwartungswert der Binomialverteilung: $E(X) = n \cdot p$

Varianz der Binomialverteilung: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$