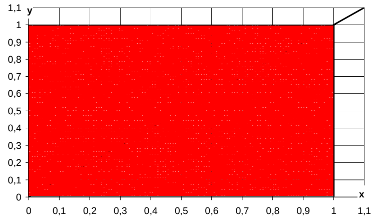
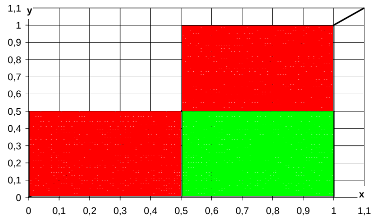
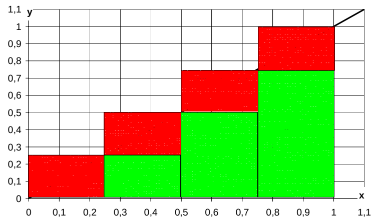
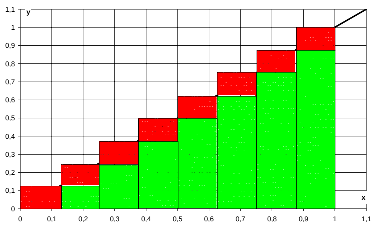
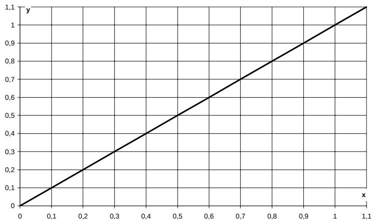
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x im Intervall [0; 1]

Graph	n	A	L	Teilintervalle: Funktionswerte		Untersumme	Obersumme
	0	1	1	f(0) = 0	f(1) = 1	$s_0 = 1\cdot 0$ $= 0$	$S_0 = 1\cdot 1$ $= 1$
	1	2	$\frac{1}{2}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$	$s_1 = \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0,25$ $s_1=\frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^1}\right]$ $s_1=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\frac{i-1}{2}=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\frac{i-1}{2^1}$	$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}=0,75$ $S_1=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+1\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2^1}+\frac{2^1}{2^1}\right]$ $S_1=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\frac{i}{2}=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\frac{i}{2^1}$
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{2}{2}$		
	2	4	$\frac{1}{4}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$	$s_2=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$ $=\frac{3}{8}=0,375$ $s_2=\frac{1}{4}\cdot\left[0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right]$ $=\frac{1}{2^2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}\right]$ $s_2=\frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\frac{i-1}{2^2}$	$S_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1$ $=\frac{5}{8}=0,625$ $S_2=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right]$ $=\frac{1}{2^2}\cdot\left[\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^2}\right]$ $S_2=\frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\frac{i}{2^2}$
				$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{2}{4}$		
				$f\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{2}{4}$	$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$		
				$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$	$f\left(\frac{4}{4}\right)=\frac{4}{4}$		

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle

Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x im Intervall [0; 1]

	3	8	$\frac{1}{8}$	f(0) = 0 $f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}$ $f\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{2}{8}$ $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$ $f\left(\frac{4}{8}\right)=\frac{4}{8}$ $f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{8}$ $f\left(\frac{6}{8}\right)=\frac{6}{8}$ $f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{8}$	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}$ $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$ $f\left(\frac{4}{8}\right)=\frac{4}{8}$ $f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{8}$ $f\left(\frac{6}{8}\right)=\frac{6}{8}$ $f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{7}{8}$ $f\left(\frac{8}{8}\right)=\frac{8}{8}$	$s_3=\frac{1}{8}\cdot\left[0+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}\right]$ $=\frac{7}{16}\approx 0,438$ $s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[0+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^3}+\frac{7}{2^3}\right]$ $s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\frac{i-1}{2^3}$	$S_3=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}+\frac{8}{8}\right]$ $=\frac{9}{16}\approx 0,563$ $S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^3}+\frac{7}{2^3}+\frac{8}{2^3}\right]$ $S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\frac{i}{2^3}$
…	…	…	…	…	…	…	…
	n	2^n	$\frac{1}{2^n}$			$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i-1}{2^n}$	$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i}{2^n}$

Der Flächeninhalt liegt zwischen 0,438 und 0,563. Mit wachsendem n nähern sich die Untersummen und Obersummen immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt an. Der gesuchte Flächeninhalt ist der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen für die Untersumme und Obersumme.

Setzen $k=2^n$. Summe der ersten m natürlichen Zahlen: $1+2+3+\ldots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

$$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i-1}{2^n}\quad\Rightarrow s_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{k}=\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}(i-1)=\frac{1}{k^2}\cdot\left[\frac{1}{2}(k-1)k\right]=\frac{1}{k^2}\cdot\left[\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\quad\Rightarrow s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^n}\quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{2}$$

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\frac{i}{2^n}\quad\Rightarrow S_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}=\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}i=\frac{1}{k^2}\cdot\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]=\frac{1}{k^2}\cdot\left[\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\quad\Rightarrow S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^n}\quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{2}$$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x im Intervall [0; 1] beträgt $\frac{1}{2}$.

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle