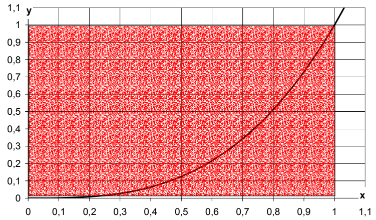
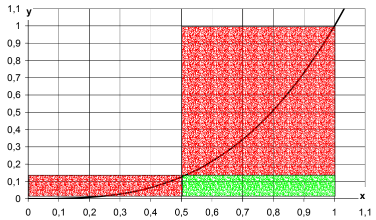
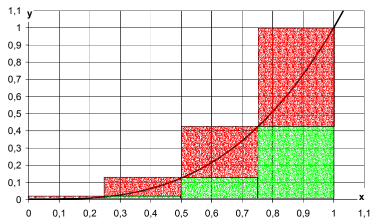
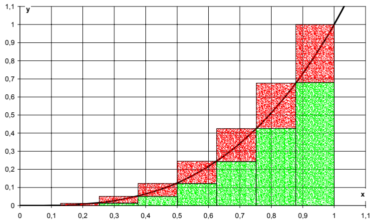
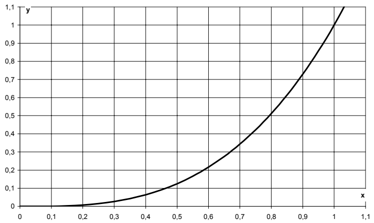
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x³ im Intervall [0; 1]

Graph	n	A	L	Teilintervalle: Funktionswerte		Untersumme	Obersumme
	0	1	1	f(0) = 0	f(1) = 1	$s_0 = 1\cdot 0 = 0$	$S_0 = 1\cdot 1 = 1$
	1	2	$\frac{1}{2}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$	$s_1 = \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\approx 0{,}063$ $s_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^3}\right]$ $s_1 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i-1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\left(\frac{i-1}{2^1}\right)^3$	$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{9}{16}\approx 0{,}563$ $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{8}+1\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2^3}+\frac{2^3}{2^3}\right]$ $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{2}\right)^3=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\left(\frac{i}{2^1}\right)^3$
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$	f(1) = 1		
	2	4	$\frac{1}{4}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$	$s_2 = \frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64} = \frac{9}{64}\approx 0{,}141$ $s_2 = \frac{1}{4}\cdot\left[0+\frac{1}{64}+\frac{8}{64}+\frac{27}{64}\right] = \frac{1}{2^2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^6}+\frac{2^3}{2^6}+\frac{3^3}{2^6}\right]$ $s_2 = \frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\left(\frac{i-1}{2^2}\right)^3$	$S_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}+\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{25}{64}\approx 0{,}391$ $S_2 = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{64}+\frac{8}{64}+\frac{27}{64}+1\right] = \frac{1}{2^2}\cdot\left[\frac{1}{2^6}+\frac{2^3}{2^6}+\frac{3^3}{2^6}+\frac{4^3}{2^6}\right]$ $S_2 = \frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\left(\frac{i}{2^2}\right)^3$
				$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$		
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$		
				$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$	f(1) = 1		

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle

Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x³ im Intervall [0; 1]

	3	8	$\frac{1}{8}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{512}$	$s_3=\frac{1}{8}\cdot\left[0+\frac{1}{512}+\frac{1}{64}+\frac{27}{512}+\frac{1}{8}+\frac{125}{512}+\frac{27}{64}+\frac{343}{512}\right]$ $=\frac{49}{256}\approx 0{,}191$	$S_3=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{512}+\frac{1}{64}+\frac{27}{512}+\frac{1}{8}+\frac{125}{512}+\frac{27}{64}+\frac{343}{512}+1\right]$ $=\frac{81}{512}\approx 0{,}316$
				$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{512}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$	$s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[0+\frac{1}{2^9}+\frac{2^3}{2^9}+\frac{3^3}{2^9}+\frac{4^3}{2^9}+\frac{5^3}{2^9}+\frac{6^3}{2^9}+\frac{7^3}{2^9}\right]$	$S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[\frac{1}{2^9}+\frac{2^3}{2^9}+\frac{3^3}{2^9}+\frac{4^3}{2^9}+\frac{5^3}{2^9}+\frac{6^3}{2^9}+\frac{7^3}{2^9}+\frac{8^3}{2^9}\right]$
				$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$	$f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{27}{512}$	$s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\left(\frac{i-1}{2^3}\right)^3$	$S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\left(\frac{i}{2^3}\right)^3$
				$f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{27}{512}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$		
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$	$f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{125}{512}$		
				$f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{125}{512}$	$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$		
				$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$	$f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{343}{512}$		
				$f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{343}{512}$	f(1) = 1		
…	…	…	…	…	…	...	…
	n	2^n	$\frac{1}{2^n}$			$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i-1}{2^n}\right)^3$	$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)^3$

Der Flächeninhalt liegt zwischen 0,191 und 0,316. Mit wachsendem n nähern sich die Untersummen und Obersummen immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt an. Der gesuchte Flächeninhalt ist der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen für die Untersumme und Obersumme.

Setzen $k=2^n$. Summe der ersten m Kubikzahlen: $1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3=\frac{1}{4}\cdot m^2\cdot(m+1)^2$

$$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i-1}{2^n}\right)^3 \quad\Rightarrow s_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i-1}{k}\right)^3=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^3}{k^3}=\frac{1}{k^4}\cdot\sum_{i=1}^{k}(i-1)^3=\frac{1}{k^4}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot(k-1)^2\cdot k^2\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k^2} \quad\Rightarrow s_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{4\cdot 2^{2n}} \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{4\cdot 2^{2n}}\right)=\frac{1}{4}$$

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \quad\Rightarrow S_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^3=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{(i)^3}{k^3}=\frac{1}{k^4}\cdot\sum_{i=1}^{k}i^3=\frac{1}{k^4}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot k^2\cdot(k+1)^2\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k^2} \quad\Rightarrow S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{4\cdot 2^{2n}} \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{4\cdot 2^{2n}}\right)=\frac{1}{4}$$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x³ im Intervall [0; 1] beträgt $\frac{1}{4}$.

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle