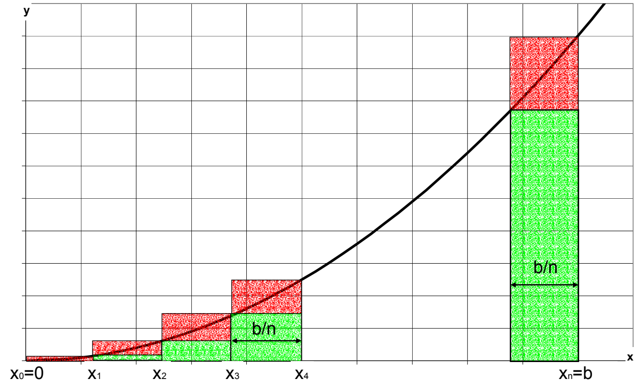
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x³ im Intervall [a; b] mit a, b∈R; 0 ≤ a ≤ b



Berechnung des Flächeninhaltes unter dem Graphen im Intervall [0; b]:

Das Intervall [0; b] wird in n gleiche Teilintervalle unterteilt. Die Breite eines Streifens beträgt dann $\frac{b}{n}$.

Der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls $[x_{i-1}; x_i]$ ist $f(x_{i-1})$, der größte ist $f(x_i)$, weil $f(x)=x^3$ eine monoton wachsende Funktion ist. Das Argument x_i ist die Breite von i Streifen: $x_i = i\cdot\frac{b}{n}$.

Mit wachsendem n nähert sich die Untersumme von unten, die Obersumme von oben dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)=x^3$ an. Der gemeinsame Grenzwert ist der gesuchte Flächeninhalt.

Zur Berechnung der Grenzwerte wird die Summe der ersten m Kubikzahlen benötigt: $1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3=\frac{1}{4}\cdot m^2\cdot(m+1)^2$

A	L	Teilintervalle: Funktionswerte		Untersumme	Obersumme
		$f(x_0)=f(0)=0^3$	$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^3$	$s_n=\frac{b}{n}\cdot\left[f(0)+f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right]$ $=\frac{b}{n}\cdot\left[0+\left(\frac{b}{n}\right)^3+\left(\frac{2b}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^3\right]$ $=\frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)b}{n}\right]^3$ $=\frac{b^4}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3$ $=\frac{b^4}{n^4}\cdot\left[\frac{1}{4}(n-1)^2n^2\right]$ $=\frac{b^4}{4n^2}\cdot\left[n^2-2n+1\right]$ $=b^4\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\right]$	$S_n=\frac{b}{n}\cdot\left[f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)+f\left(\frac{nb}{n}\right)\right]$ $=\frac{b}{n}\cdot\left[\left(\frac{b}{n}\right)^3+\left(\frac{2b}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^3+\left(\frac{nb}{n}\right)^3\right]$ $=\frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{ib}{n}\right]^3$ $=\frac{b^4}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3$ $=\frac{b^4}{n^4}\cdot\left[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right]$ $=\frac{b^4}{4n^2}\cdot\left[n^2+2n+1\right]$ $=b^4\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\right]$
		$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^3$	$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3$		
		$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3$	$f(x_3)=f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^3$		
n	$\frac{b}{n}$	…	…		
		$f(x_{i-1})=f\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^3$	$f(x_i)=f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^3$		
		…	…		
		$f(x_{n-1})=f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^3$	$f(x_n)=f\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^3$		
			Grenzwerte:	$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{b^4}{4}$	$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b^4}{4}$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x³ im Intervall [0; b] beträgt $\frac{b^4}{4}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x³ im Intervall [0; a] beträgt $\frac{a^4}{4}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x³ im Intervall [a; b] beträgt $\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$.

Bezeichnungen: A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle