Definitionen und Sätze Folgen

Zahlenfolge
Eine **reelle Zahlenfolge** (a_n) ist eine Funktion mit einer Menge natürlicher Zahlen als Definitionsbereich und einer Menge reeller Zahlen als Wertebereich.

Darstellungsmöglichkeiten
rekursive Zuordnungsvorschrift:
Jedes Glied der Zahlenfolge wird aus vorangehenden Gliedern gewonnen. Benötigte Anfangsglieder müssen angegeben werden. (lat.: reccurere: zurücklaufen)

explizite Zuordnungsvorschrift:
Funktionsgleichung, mit der sich jedes Glied unmittelbar durch Einsetzen berechnen lässt.
(lat.: explicare: ausbreiten, klarlegen)

Geometrische Zahlenfolge
(a_n) sei eine Zahlenfolge und q eine reelle Zahl mit $q \neq 0$.
(a_n) heißt **geometrische Folge** genau dann, wenn es eine Zahl q ($q \neq 0$) gibt, so dass für jedes n gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad (a_n \neq 0)$$

Die Zahl q heißt Quotient der geometrischen Folge.

Satz: explizite Bildungsvorschrift einer geometrischen Zahlenfolge
Wenn (a_n) eine geometrische Folge ist, so gilt für alle $n \in N$: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

<u>Beweis:</u> $a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_{n-2} \cdot q) \cdot q = a_{n-2} \cdot q^2 = a_{n-3} \cdot q^3 = \ldots = a_{n-(n-1)} \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$

Arithmetische Zahlenfolge
(a_n) sei eine Zahlenfolge und d eine reelle Zahl.
(a_n) heißt **arithmetische Folge** genau dann, wenn es eine Zahl d gibt, so dass für jedes n gilt: $a_{n+1} = a_n + d$
Die Zahl d heißt Differenz der geometrischen Folge.

Satz: explizite Bildungsvorschrift einer arithmetischen Zahlenfolge
Wenn (a_n) eine arithmetische Folge ist, so gilt für alle $n \in N$: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

<u>Beweis:</u> $a_n = a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = a_{n-2} + 2d = a_{n-3} + 3d = \ldots = a_{n-(n-1)} + (n-1) \cdot d = a_1 + (n-1) \cdot d$

Monotonie
(a_n) sei eine Zahlenfolge.
(a_n) heißt **streng monoton wachsend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$
(a_n) heißt **streng monoton fallend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$
(a_n) heißt **monoton wachsend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$
(a_n) heißt **monoton wachsend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$

Schranken

(a_n) sei eine Zahlenfolge.
(a_n) heißt **nach oben beschränkt** genau dann, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \leq s$
Die Zahl s heißt dann **obere Schranke** der Zahlenfolge (a_n).
(a_n) heißt **nach unten beschränkt** genau dann, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass für alle n gilt: $a_n \geq s$
Die Zahl s heißt dann **untere Schranke** der Zahlenfolge (a_n).
(a_n) heißt **beschränkt** genau dann, wenn (a_n) nach oben und nach unten beschränkt ist.

Grenzwert

(a_n) sei eine Folge, g sei eine Zahl.
Wird der Abstand zwischen a_n und g mit wachsendem n beliebig klein, so sagt man:

- Die Folge (a_n) strebt gegen g oder
- g ist Grenzwert der Folge (a_n) oder
- (a_n) konvergiert gegen g

Gibt es eine Zahl g, gegen die die Folge (a_n) konvergiert, so sagt man: Die Folge (a_n) ist **konvergent**.
Gibt es keine Zahl g, gegen die die Folge (a_n) konvergiert, so sagt man: Die Folge (a_n) ist **divergent**.
Eine Folge, die die Zahl Null als Grenzwert hat, heißt **Nullfolge**.
Jede konstante Folge (a_n) mit $a_n = c$ für alle n konvergiert gegen c.

ε-Umgebung von g

Es sei $a \in R$ eine reelle Zahl und $\varepsilon > 0$ beliebig.
Die ε-Umgebung von a heißt das offene Intervall $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[= \{y \in R | a-\varepsilon \leq y \leq a+\varepsilon\}$
$U_\varepsilon(a)$ heißt das offene Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$

Grenzwert

g heißt **Grenzwert** der Zahlenfolge (a_n), wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle Zahlenfolgeglieder in $U_\varepsilon(g)$ liegen.

- d.h. nur endlich viele Glieder liegen außerhalb von $U_\varepsilon(g)$
- d.h. ab einem n_0 liegen alle Glieder innerhalb $U_\varepsilon(g)$
- d.h. die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ muss ab einem n_0 erfüllt sein.

$\varepsilon > 0$ frei wählbar $\rightarrow$ ab n_0 alle Glieder in $U_\varepsilon(g)$

Partialsummen und Partialsummenfolge

Ist $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \ldots)$ eine Zahlenfolge, so bezeichnet man die Zahlen

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2 \quad = s_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad = s_2 + a_3$

…

$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \quad = s_{k-1} + a_k$

als **Partialsummen** (Teilsummen) der Folge (a_n). **k-te Partialsumme:** $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$

Die Folge $(s_k) = (s_1; s_2; ...; s_k)$ heißt **Partialsummenfolge** von (a_n).

<u>rekursive Definition:</u> $s_1 = a_1$; $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$

Satz: k-te Partialsumme einer arithmetischen Folge

$(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \ldots)$ sei eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz d.

Für die k-te Partialsumme gilt dann: $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \left(a_1 + (i-1) \cdot d\right) = ka_1 + \frac{k(k-1)d}{2}$

bzw.: $s_k = ka_1 + \frac{k(k-1)d}{2} = \frac{k}{2}\left[2a_1 + (k-1)d\right] = \frac{k}{2}\left[a_1 + \left(a_1 + (k-1)d\right)\right] = \frac{k}{2}\left[a_1 + a_n\right] = k\frac{a_1 + a_n}{2}$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{i=1}^{k} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(a_1 + (i-1) \cdot d\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_1 + \sum_{i=1}^{k} id - \sum_{i=1}^{k} d \\
&= a_1 \sum_{i=1}^{k} 1 - d \sum_{i=1}^{k} 1 + d \sum_{i=1}^{k} i \\
&= ka_1 - kd + d\frac{k(k+1)}{2} \\
&= ka_1 - d\frac{2k}{2} + d\frac{k(k+1)}{2} \\
&= ka_1 + d\frac{k(k+1) - 2k}{2} \\
&= ka_1 + d\frac{k^2 + k - 2k}{2} \\
&= ka_1 + d\frac{k^2 - k}{2} \\
&= ka_1 + d\frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}$$

Satz: k-te Partialsumme einer geometrischen Folge

Ist (a_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q \neq 1$, so gilt für deren k-te Partialsumme: $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$.

Beweis mittels vollständiger Induktion:

Voraussetzung: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ mit $q \neq 0$ und $q \neq 1$ bzw. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Behauptung: k-te Partialsumme: $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$

Induktionsanfang: k = 1: $s_1 = a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$ $\quad s_1 = a_1 \frac{q^1 - 1}{q-1} = a_1$

Induktionsvoraussetzung: $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$

Induktionsbehauptung: $s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1} + a_1 \cdot q^k = a_1 \left(\frac{q^k - 1}{q-1} + q^k \right) \\ &= a_1 \left(\frac{q^k - 1}{q-1} + \frac{q^k (q-1)}{q-1} \right) = a_1 \left(\frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q-1} \right) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1} \end{aligned}$$

q.e.d.

2. Beweis:

Voraussetzung: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ mit $q \neq 0$ und $q \neq 1$ bzw. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Behauptung: k-te Partialsumme: $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1}$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k \\ &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{k-2} + a_1 q^{k-1} \\ q s_k &= q a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{k-1} + a_1 q^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q s_k - s_k &= a_1 q^k - a_1 \\ s_k (q-1) &= a_1 (q^k - 1) \\ s_k &= a_1 \frac{q^k - 1}{q-1} \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz: k-te Partialsumme einer geometrischen Folge mit q = 1

Ist (a_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q=1$, so gilt für deren k-te Partialsumme:

$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = k \cdot a_1$