Heron[1] – Verfahren: Näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln

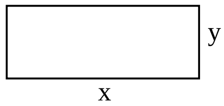
Nach Wahl eines geeigneten Startwertes x_0 liefert die wiederholte Berechnung (Iteration[2]) nach der Vorschrift

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \qquad (a \geq 0;\ n \in \mathbb{N})$$

eine Folge von immer genaueren Näherungswerten für $\sqrt{a}$.

Herleitung der Iterationsformel von Heron

Die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{a}$ führt auf das gleiche Problem, wie die Bestimmung der Seitenlänge eines Quadrates mit gegebenen Flächeninhalt. Um die Seitenlänge eines Quadrates mit dem Flächeninhalt **A** zu berechnen, betrachtete Heron eine Folge von Rechtecken, die alle den Flächeninhalt **A** haben und sich dem gesuchten Quadrat annähern.



Beispiel: A = 2cm² ($\Rightarrow$ Berechnung von $\sqrt{2}$)

1. Es wird eine beliebige Seitenlänge des Rechtecks gewählt.

   x = 2cm

2. Die andere Seitenlänge des Rechtecks ergibt sich nun aus der Flächeninhaltsformel $A = x \cdot y$ zu $y=\frac{A}{x}$.

   $y=\frac{2cm^2}{2cm} \Rightarrow y = 1cm$

3. Um ein Rechteck zu erhalten, welches dem Quadrat angenähert ist, bildet man aus den beiden Seitenlängen das arithmetische Mittel:

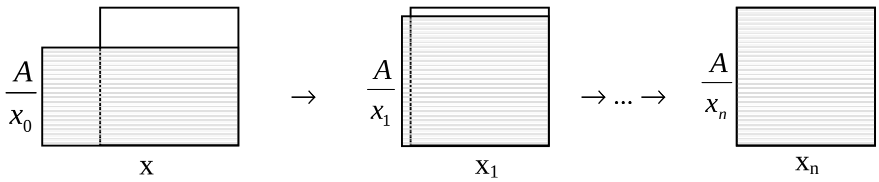
   $$x_{neu}=\frac{1}{2}(x+y)$$

   $x_{neu}=\frac{1}{2}(2cm+1cm) \Rightarrow x_{neu}=\frac{3}{2}cm$

4. Damit das neue Rechteck wieder den Flächeninhalt A hat, muss die andere Seitenlänge des neuen Rechtecks $y_{neu}=\frac{A}{x_{neu}}$ sein.

   $y_{neu}=\frac{2cm^2}{\frac{3}{2}cm} \Rightarrow y_{neu}=\frac{4}{3}cm$

5. Die Schritte 3 und 4 können mit den neuen Rechteckseitenlängen beliebig oft wiederholt werden. Die Folge der dabei errechneten Rechteckseitenlängen nähert sich immer mehr der gesuchten Quadratseitenlänge.



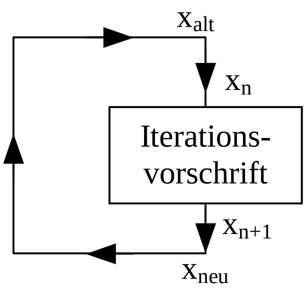
6. Iterationsformel:

   $$A = x \cdot y \Rightarrow y=\frac{A}{x} \qquad x_{neu}=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)$$

   (x_{neu} ist ein besserer Näherungswert für $\sqrt{A}$ als x)

Beispiel: Näherungswerte für $\sqrt{2}$ Startwert: $x_0 = 2$; Angabe auf 7 Dezimalen genau

n	x_n	x_{n+1}
0	2	1,5000000
1	1,5000000	1,4166666
2	1,4166666	1,4142157
3	1,4142157	1,4142136
4	1,4142136	1,4142136
…		



Schon bei n = 4 unterscheiden sich der alte Wert x_n und der neue Wert x_{n+1} nicht mehr. Es ist also $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$.

[1] Heron von Alexandria (65 – 125 n. Chr.), griechischer Mathematiker
[2] iterare (lat.): wiederholen