Definitionen und Sätze: Unbestimmtes Integral

Definition (Stammfunktion):
Besitzen die Funktionen f und F einen gemeinsamen Definitionsbereich D_f und gilt F' = f für alle $x \in D_f$, so heißt **F Stammfunktion** von f (in D_f).

Erläuterung:

- Aufgabenstellung beim Differenzieren: Zu einer gegebenen Funktion f ist die Ableitungsfunktion f' zu bestimmen.
- Aufgabenstellung der Integralrechnung: Zu einer gegebenen Funktion f ist eine Funktion F zu bestimmen, deren Ableitungsfunktion f ist.
- Integration…Bestimmen der Stammfunktion
- f → DIFFERENZIEREN → Ableitungsfunktion f'
  f → INTEGRIEREN → Stammfunktion F mit F'=f

Satz (Stammfunktionen zu einer Funktion f unterscheiden sich nur in einer Konstanten):
Es sei F_1 eine Stammfunktion von f in D_f. Eine Funktion F_2 ist genau dann Stammfunktion von f, wenn es eine reelle Zahl c gibt, so dass $\mathbf{F_2(x) = F_1(x) + c}$ für alle $x \in D_f$ gilt.

Definition (Unbestimmtes Integral):
Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral** von f.

Schreibweise: $\int f(x)dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$

$\int f(x)dx$ …Integral von f von x nach dx
$\int$ …Integralzeichen (zu jedem Integralzeichen gehört ein Differential!)
(Integralzeichen 1675 nach Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716))
(Integral…nach Jakob Bernoulli (1645-1705) und Johann Bernoulli (1667-1748))
f(x)…Integrandenfunktion bzw. Integrand
c…Integrationskonstante
x…Integrationsvariable
dx…Differential

Das Ermitteln von unbestimmten Integralen:

Satz (Potenzregel): $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ mit $n \in Z$, $n \neq -1$ (und $x \neq 0$, falls $n < -1$), $c \in R$

Satz (Potenzfunktion): $\int x^q dx = \frac{1}{q+1}x^{q+1} + c$ mit $q \in R$, $q \neq -1$ und $x > 0$, $c \in R$

Satz (Faktorregel): $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ mit $k \in R$, f…stetige Funktion

Satz (Summenregel): $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ mit f, g…stetige Funktionen

Satz (Integration durch lineare Substitution):
Es sei f eine verkettete Funktion mit $f(x) = u(v(x))$ und $v(x) = mx + n$ sowie F eine Stammfunktion der äußeren Funktion u. Dann gilt: $\int f(x)dx = \int u(mx+n)dx = \frac{1}{m}F(mx+n) + c$.

Beweis: Ableiten der Stammfunktion muss den Integranden ergeben:

$$\left[\frac{1}{m}F(mx+n) + c\right]' = \frac{1}{m}F'(mx+n) = \frac{1}{m} \cdot m \cdot u(v(x)) = f(x)$$

Satz (Partielle Integration):
Sind u und v im Intervall [a; b] differenzierbare Funktionen und u' und v' im Intervall [a; b] stetig, so gilt:
$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$

Beweis: Sei $F(x) = u(x) \cdot v(x)$

Produktregel der Differentiation: $F'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$

Integration: $\Rightarrow \int F'(x)dx = \int u(x) \cdot v'(x) + \int u'(x) \cdot v(x)$

$F(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) + \int u'(x) \cdot v(x)$

$\Rightarrow \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$