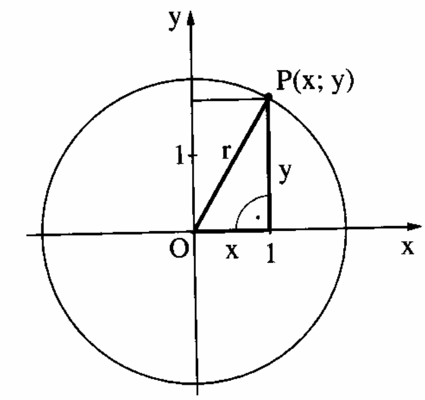
# Kreise in der Ebene

Definition:
Die Menge aller Punkte P der Ebene, die von einem Punkt M denselben Abstand r haben, heißt ***Kreis*** mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

**Mittelpunktsgleichung eines Kreises**
In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Kreis k um M(0; 0) die Gleichung

$$x^2+y^2=r^2$$

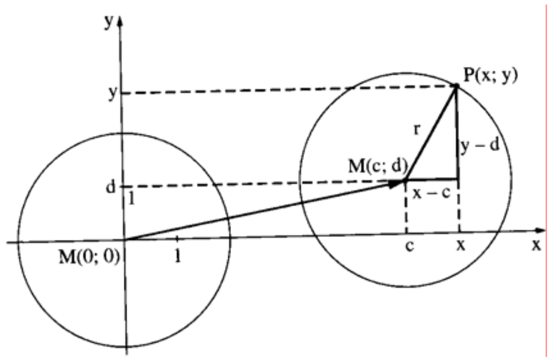



**Kreisgleichung eines Kreises mit Mittelpunkt M(c; d)**
In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Kreis k um M(c; d) die Gleichung

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$$

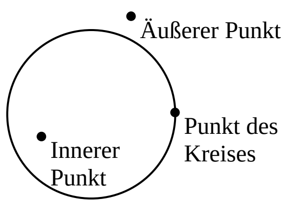
**Kreisgleichung in quadratischer Form:**

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$$
$$\Rightarrow x^2-2cx+c^2+y^2-2dy+d^2=r^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2cx-2dy+c^2+d^2-r^2=0$$




Lagebeziehung: Kreis – Punkt

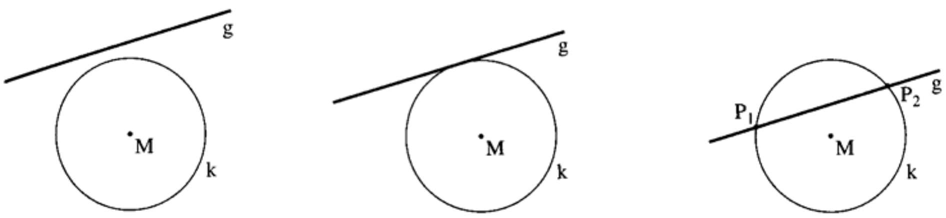
- P($x_1$; $y_1$) ist ein Punkt des Kreises $\Leftrightarrow$ $(x_1-c)^2+(y_1-d)^2=r^2$
- P($x_1$; $y_1$) ist ***innerer Punkt*** des Kreises $\Leftrightarrow$ $(x_1-c)^2+(y_1-d)^2<r^2$
- P($x_1$; $y_1$) ist ***äußerer Punkt*** des Kreises $\Leftrightarrow$ $(x_1-c)^2+(y_1-d)^2>r^2$




Lagebeziehung: Kreis – Gerade

geg.: k: $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$
g: $y=mx+n$

- g ist Passante von k $\Leftrightarrow$ kein Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ $(x-c)^2+(mx+n-d)^2=r^2$ hat keine Lösung
- g ist Tangente von k $\Leftrightarrow$ ein Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ $(x-c)^2+(mx+n-d)^2=r^2$ hat eine Lösung
- g ist Sekante von k $\Leftrightarrow$ zwei Punkte gemeinsam $\Leftrightarrow$ $(x-c)^2+(mx+n-d)^2=r^2$ hat zwei Lösungen

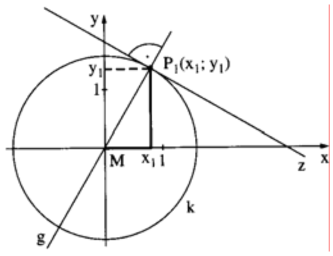


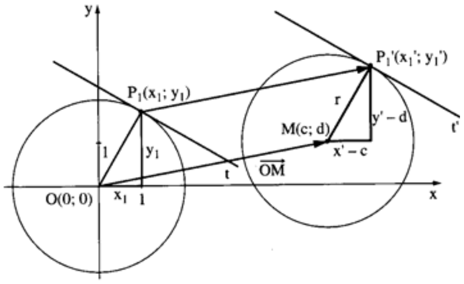
## Tangentengleichung der Tangente an den Kreis k im Punkt P($x_1$; $y_1$)

Herleitung der Tangentengleichung:

geg.: k: $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ ges.: Tangentengleichung

P($x_1$; $y_1$)




Punkt-Richungsgleichung einer Geraden $y = mx + n$

P($x_1$; $y_1$) ∈ g $\Rightarrow\ y_1 = mx_1 + n \ \Rightarrow\ n = y_1 - mx_1 \ \Rightarrow\ y = mx + y_1 - mx_1 \ \Rightarrow\ y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m_g = \frac{y_1-d}{x_1-c} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_g} = \frac{1}{-\frac{y_1-d}{x_1-c}} = \frac{c-x_1}{y_1-d} \Rightarrow y-y_1 = \frac{c-x_1}{y_1-d}\cdot(x-x_1) \Rightarrow (y-y_1)(y_1-d)=(c-x_1)(x-x_1)$$

$$\Rightarrow (y-y_1)(y_1-d)+(x_1-c)(x-x_1)=0 \quad \Rightarrow x(x_1-c)-x_1(x_1-c)+y(y_1-d)-y_1(y_1-d)=0 \quad \textbf{I}$$

P($x_1$; $y_1$) ∈ k $\quad \Rightarrow (x_1-c)^2+(y_1-d)^2=r^2 \quad \Rightarrow x_1(x_1-c)-c(x_1-c)+y_1(y_1-d)-d(y_1-d)=r^2 \quad \textbf{II}$

**I + II** $\quad \Rightarrow x(x_1-c)-c(x_1-c)+y(y_1-d)-d(y_1-d)=r^2 \quad \Rightarrow (x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$

Setzt man in die Kreisgleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ für je ein x und ein y die Koordinaten des Punktes P ein, erhält man die Gleichung der Tangente an den Punkt.

Beispiel:

geg.: M(4; -1); $r=\sqrt{5}$ ges.: Tangente an k in P(6; -2)

Lösung: k: $(x-4)^2+(y+1)^2=5$

$\Rightarrow$ k: $(x-4)(x-4)+(y+1)(y+1)=5$

Tangentengleichung:

$(x-4)(6-4)+(y+1)(-2+1)=5$

$\Rightarrow\ 2x-8-y-1=5$

$\Rightarrow\ y=2x-14$

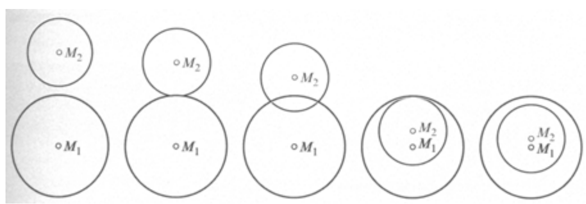
**Tangente an Kreis mit M(0; 0):** $(x-0)(x_1-0)+(y-0)(y_1-0)=r^2 \quad \Rightarrow \quad xx_1+yy_1=r^2$

**Tangente an Kreis mit M(c; d):** $(x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$

## Lagebeziehung: Kreis – Kreis

GLS: $(x-c_1)^2+(y-d_1)^2=r_1^2$

$(x-c_2)^2+(y-d_2)^2=r_2^2$




- keinen Punkt gemeinsam ⇔ GLS hat keine Lösung
- einen Punkt gemeinsam ⇔ GLS hat eine Lösung
- zwei Punkt gemeinsam ⇔ GLS hat zwei Lösungen
- identisch ⇔ $c_1 = c_2$ und $d_1 = d_2$ und $r_1 = r_2$