

Kriterien für das Monotonieverhalten und für Extremstellen

(Die Funktion f sei hinreichend oft differenzierbar.)

Monotonieverhalten

	Eine Funktion f heißt in einem Intervall I ihres Definitionsbereiches		notwendig	hinreichend
	monoton wachsend	monoton fallend		
Definition	wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$			ja
	strenge Monotonie: \leq durch $<$ ersetzen	strenge Monotonie:		
Satz	$\forall x \in I : f'(x) \geq 0$			
	strenge Monotonie:	strenge Monotonie:		

Extremstellen

	Eine im offenen Intervall I definierte Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in I$ ein		notwendig	hinreichend
	lokales Maximum	lokales Minimum		
Definition	wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ gilt: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0)$			
	Definition auch mit $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ möglich. Achtung: Die Randstellen eines Intervalls können globale Extrema sein, jedoch keine lokalen (Es existiert keine ε -Umgebung.).			
Satz	x_0 Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ Umkehrung gilt nicht!!!			
Satz	$f'(x_0) = 0$ und		ja	ja
Satz			nein	ja
Satz		$n \dots$ gerade $\wedge f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge$	ja	ja

Kriterien für das Krümmungsverhalten und für Wendestellen

(Die Funktion f sei hinreichend oft differenzierbar.)

Krümmungsverhalten

	Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall I ihres Definitionsbereiches genau dann		notwendig	hinreichend
	konvex	konkav		
Definition				
Satz	$\forall x \in I :$	$\forall x \in I :$		

Wendestellen

	Eine Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D_f$ eine Wendestelle, wenn		notwendig	hinreichend
Definition	f' an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt.			
	$f'(x_0)$ ist	\Rightarrow konvex \rightarrow konkav	$f'(x_0)$ ist	\Rightarrow konkav \rightarrow konvex
Satz	x_0 Wendestelle \Rightarrow Umkehrung gilt nicht!			
Satz	$f''(x_0) = 0$ und		ja	ja
	\Rightarrow konvex \rightarrow konkav	\Rightarrow konkav \rightarrow konvex		
Satz	$f''(x_0) = 0$ und		nein	ja
	\Rightarrow konvex \rightarrow konkav	\Rightarrow konkav \rightarrow konvex		
Satz			ja	ja
	\Rightarrow konvex \rightarrow konkav	\Rightarrow konkav \rightarrow konvex		