Nullstellen von f, f' und f''

Untersuchte Nullstelle	Folgerungen	Beispiel
$f(x)=0$ $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$	Der Graph von f schneidet an den ***Nullstellen*** von f die Abszissenachse.	$f(x)=2x^4+7x^3+5x^2$ $2x^4+7x^3+5x^2=0 \qquad \Rightarrow x_{01}=0;\ x_{02}=-1;\ x_{03}=-\frac{5}{2}$
$f'(x)=0$ $x_{E1}, x_{E2}, \ldots, x_{Ek}$	Die Nullstellen der ersten Ableitung sind ***Extremstellenkandidaten***. Weitere Extremstellen können nicht auftreten.	$f'(x)=8x^3+21x^2+10x$ $8x^3+21x^2+10x=0 \qquad \Rightarrow x_{E1}=0;\ x_{E2}=-\frac{5}{8};\ x_{E3}=-2$
	Überprüfung der Extremstellenkandidaten mit Hilfe der 2. Ableitung: $f''(x_E)<0 \Rightarrow Maximumstelle$ $f''(x_E)>0 \Rightarrow Minimumstelle$ $f''(x_E)=0 \Rightarrow keine\ Aussage$ *(weiter mit VZW-Kriterium)*	$f''(x)=24x^2+42x+10$ $f''(x_{E1})=f''(0)=10>0 \Rightarrow Minimumstelle$ $f''(x_{E2})=f''\left(-\frac{5}{8}\right)=-\frac{55}{8}<0 \Rightarrow Maximumstelle$ $f''(x_{E3})=f''(-2)=22>0 \Rightarrow Minimumstelle$
	Angabe des ***Extremwertpunktes***: $f(x_E)$ berechnen	$f(x)=2x^4+7x^3+5x^2$ $f(x_{E1})=f(0)=0 \ \Rightarrow\ P_{E1}(0;0)\ Min$ $f(x_{E2})=f\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{1125}{2048}\approx 0{,}549 \ \Rightarrow\ P_{E2}\left(-\frac{5}{8};\frac{1125}{2048}\right)\ Max$ $f(x_{E3})=f(-2)=-4 \ \Rightarrow\ P_{E3}(-2;-4)\ Min$
$f''(x)=0$ $x_{W1}, x_{W2}, \ldots, x_{Wl}$	Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind ***Wendestellenkandidaten***. Weitere Wendestellen können nicht auftreten.	$f''(x)=24x^2+42x+10$ $24x^2+42x+10=0$ $\Rightarrow \quad x_{W1}=-\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{201}}{24}\approx -0{,}284$ $x_{W2}=-\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{201}}{24}\approx -1{,}466$
	Überprüfung der Wendestellenkandidaten mit Hilfe der 3. Ableitung: $f'''(x_W)<0 \Rightarrow konvex \rightarrow konkav$ $f'''(x_W)>0 \Rightarrow konkav \rightarrow konvex$ $f'''(x_W)=0 \Rightarrow keine\ Aussage$ *weiter mit VZW-Kriterium*	$f'''(x)=48x+42$ $f'''(x_{W1})=f'''\left(-\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{201}}{24}\right)=2\sqrt{201}>0$ $\Rightarrow konkav \rightarrow konvex$ $f'''(x_{W2})=f'''\left(-\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{201}}{24}\right)=-2\sqrt{201}<0$ $\Rightarrow konvex \rightarrow konkav$
	Angabe des Wendepunktes: $f(x_W)$ berechnen	$f(x)=2x^4+7x^3+5x^2$ $f(x_{W1})=f\left(-\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{201}}{24}\right)=\frac{21\sqrt{201}}{256}-\frac{2089}{2304}\approx 0{,}256$ $\Rightarrow P_{W1}\left(-\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{201}}{24};\frac{21\sqrt{201}}{256}-\frac{2089}{2304}\right)\ konkav \rightarrow konvex$ $f(x_{W2})=f\left(-\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{201}}{24}\right)=-\frac{21\sqrt{201}}{256}-\frac{2089}{2304}\approx -2{,}070$ $\Rightarrow P_{W2}\left(-\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{201}}{24};-\frac{21\sqrt{201}}{256}-\frac{2089}{2304}\right)\ konvex \rightarrow konkav$