Lehrprobe im Fach Mathematik

Thema der Unterrichtseinheit: **Funktionen**

Thema der Unterrichtsstunde: **Nullstellen quadratischer Funktionen**

Name:	Jens Bernheiden
Schule:	
Schulleiterin:	
Seminarleiterin:	
Studienleiterin:	
Mentorin:	
Klasse:	11
Stunde:	
Datum:	23.06.00

1. Bemerkungen zur Lerngruppe

2. Sachanalyse

In der Jahrgangsstufe 11 werden entsprechend des Rahmenplans 4 Stoffgebiete unterrichtet:

1. Koordinatengeometrie
2. Stochastik
3. Zahlenfolgen
4. Funktionen

Die ersten drei Stoffgebiete sind abgeschlossen. Das Thema Zahlenfolgen wurde vor dem Stoffgebiet Funktionen behandelt. Die vorliegende Stunde bettet sich als 3. Stunde in das Thema Funktionen ein. In den ersten beiden Stunden wurden der Funktionsbegriff, grundlegende Eigenschaften von Funktionen und lineare Funktionen wiederholt. Das Wissen der Schülerinnen und Schüler über die grafische Darstellung, die Normal- und Scheitelpunktform und die Gleichungen zur Berechnung der Nullstellen von quadratischen Funktionen wurde aufgefrischt. Mit den Schülerinnen und Schülern wurde außerdem der Einfluss des Parameters a auf den Graphen und die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ erarbeitet.

In dieser Stunde sollen die Nullstellen quadratischer Funktionen im Vordergrund stehen. Der Lernstoff wurde bereits in den vergangenen Schuljahren behandelt. Schwerpunkte der Stunde sind die Diskriminante und der Wurzelsatz von Vieta.

In den folgenden Stunden sollen die Potenzfunktionen, die Wurzel-, Exponential-, Logarithmus-, Winkel- und Betragsfunktionen wiederholt werden.

Der zentrale Begriff der Analysis, der die Abhängigkeit gewisser Größen von anderen beschreibt, ist der Funktionsbegriff.

Definition: Seien X und Y zwei nichtleere Mengen. Eine ***Funktion*** oder Abbildung f von X nach (oder in) Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ in vollkommen eindeutiger Weise genau ein $y \in Y$ zuordnet. Dieses dem Element x zugeordnete Element y bezeichnet man auch als f(x) und nennt es den Wert der Funktion an der Stelle x oder das Bild von x, während x ein Urbild von f(x) heißt. X wird Definitionsmenge oder der Definitionsbereich, Y die Zielmenge oder der Wertebereich von f genannt.

Eine Funktion f: $X \to Y$ stellt die Elemente x von X mit gewissen Elementen y von Y zu Paaren (x, y) zusammen, und zwar so, dass Paare (x_1, y_1), (x_2, y_2) mit gleichen ersten Komponenten auch gleiche zweite Komponenten haben: $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Eine Funktion f ist also eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$ mit folgenden Eigenschaften:

1. jedes $x \in X$ tritt als erste Komponente eines Paares aus f auf,
2. sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) Paare aus f und ist $x_1 = x_2$, so ist auch $y_1 = y_2$.

Im Unterricht der Klassenstufe 11 werden elementare reellwertige Funktionen f: $X \to \mathbf{R}$ betrachtet. Elementare Funktionen sind durch Formeln definiert, die nur endlich viele Operationen mit der unabhängigen Variablen sowie mit Konstanten vorschreiben. Die quadratischen Funktionen sind ganzrationale Funktionen in einer Variablen.

Definition: Eine Funktion heißt ***ganzrationale Funktion*** (Polynom), wenn das Argument x nur den Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation unterworfen ist: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$; $a_i \in \mathbf{R}$ (i = 0, 1, …, n), $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Die Konstanten a_i werden Koeffizienten von f genannt, n heißt Grad des Polynoms.

Insbesondere bezeichnet man $f(x) = a$ als Konstante, $f(x) = ax + b$ als lineare Funktion und $f(x) = ax^2 + bx + c$ als quadratische Funktion.

Der Wurzelsatz von Vieta stellt einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen und den Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion her.

Wurzelsatz von Vieta: ($\Rightarrow$) Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, so gilt:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n \\ a_{n-2} &= x_1 x_2 + \ldots + x_1 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Aus dieser Darstellung der Koeffizienten folgt, dass $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen des Polynoms f sind.

Zum Beweis des Satzes (⇒) schreibt man das Polynom in der kanonischen Produktdarstellung und multipliziert die Klammern aus:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\\
&= x^n + (-x_1 - x_2 - \ldots - x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 \cdot x_1x_3 \cdot\ldots\cdot x_1x_n + x_2x_3 \cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n)x^{n-2}\\
&\quad + (-x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - \ldots - x_1x_2x_n - \ldots - x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3}\\
&\quad \vdots\\
&\quad + (-1)^{n-1}(x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1} + x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n)x^1\\
&\quad + (-1)^n(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)
\end{aligned}
$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der ursprünglichen Darstellung des Polynoms liefert die Behauptung.
Auf den komplizierten Beweis der Umkehrung des Satzes soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Schon an den Koeffizienten eines Polynoms kann man erkennen, ob es mehrfache Nullstellen besitzt. Dazu berechnet man die Diskriminante D(f).
Die Diskriminante von f ist eine ganzrationale Funktion in den Koeffizienten von f (vgl. Wurzelsatz von Vieta).

<u>Definition:</u> Es seien x_1, x_2, ...,x_n die Nullstellen des Polynoms $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.
Die ***Diskriminante*** von f ist $D(f) = a_n^{2n-2} \prod\limits_{\substack{\nu<\mu \\ \nu,\mu=1,\ldots,n}} (x_\nu - x_\mu)^2$.

<u>Satz:</u> Eine ganzrationale Funktion f besitzt ***mehrfache Nullstellen*** ⇔ D(f) = 0. (ohne Beweis)

Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades. Der Graph einer quadratischen Funktion mit dem Definitionsbereich **R** ist eine Parabel mit einer vertikalen Symmetrieachse bei $x = \frac{-b}{2a}$.

<u>Definition:</u> Die ***Parabel*** ist der geometrische Ort aller Punkte M(x; y), die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden, der Leitlinie, gleich große Entfernungen besitzen.

Die quadratische Funktion nimmt für a > 0 zunächst ab, erreicht ein Minimum und nimmt dann wieder zu, die Parabel ist nach oben geöffnet. Für a < 0 steigt die quadratische Funktion an, erreicht ein Maximum und fällt danach wieder ab, die Parabel ist nach unten geöffnet.

Das Extremum, der Scheitelpunkt der Parabel, liegt bei $\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse liegen bei $(0;c)$, mit der Abszissenachse bei $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};0\right)$.

Der Wurzelsatz von Vieta (⇒) reduziert sich für eine quadratische Funktion in Normalform zu:
Sind x_1 und x_2 die Nullstellen des quadratischen Polynoms $f(x) = x^2 + px + q$, so gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Die Diskriminante D einer ganzrationalen Funktion 2. Grades ist: $D = \frac{p^2}{4} - q$.

Für D>0 besitzt das quadratische Polynom zwei, für D=0 eine und für D<0 keine Nullstellen.

3. Didaktische Rechtfertigung

Die Rahmenrichtlinien des Landes Mecklenburg – Vorpommern verlangen bei der Behandlung des Stoffgebietes Funktionen die Wiederholung der elementaren Funktionen.
Mit den quadratische Funktionen lernen die Schülerinnen und Schüler eine Klasse nichtlinearer Funktionen kennen. Am Beispiel der quadratischen Funktionen können elementare mathematische Begriffe und Sätze erarbeit werden, z.B. die Symmetrieachse, der Fundamentalsatz der Algebra und der Wurzelsatz von Vieta. Selbst Extremwerteprobleme, die auf ein Polynom 2. Grades führen, können durch Berechnung des Scheitelpunktes gelöst werden.
Zahlreiche Beziehungen in der Physik, Technik und anderen Bereichen werden mit Hilfe quadratischer Funktionen beschrieben. In der Physik begegnen dem Lernenden ganzrationale Funktionen 2. Grades z.B. bei der Behandlung der beschleunigten Bewegung, der Radialkraft, der Reibungskraft, der kinetischen Energie, der Rotationsenergie, der Spannenergie einer Feder, der Energie eines Kondensators, der Schwingungsgleichungen. Die meisten der genannten physikalischen Gebiete werden in Sekundarstufe II aufgegriffen. Die quadratischen Funktionen bilden für die Schülerinnen und Schüler also nicht nur eine Vorstufe der ganzrationalen Funktionen höheren Grades, die Kenntnisse der Eigenschaften dieser Klasse von Funktionen werden unmittelbar, z.B. in der Physik, benötigt.

Im ersten Teil der Unterrichtsstunde sollen die Schülerinnen und Schüler die Nullstellen einer aus der Physik stammenden quadratischen Funktion bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass quadratische Funktionen in der Praxis Anwendung finden. Außerdem lernen die Schülerinnen und Schüler, mathematische Lösungen zu interpretieren. Mit dem Bestimmen der Nullstellen beim senkrechten Wurf wird exemplarisch ein für die Physik wichtiges mathematisches Verfahren geschult.
Ausgehend von der Lösungsformel für die Nullstellen und der Definition der Diskriminante einer quadratischen Funktionen sollen die Schülerinnen und Schüler untersuchen, wie viele Nullstellen eine ganzrationale Funktion 2. Grades besitzt. Die Schülerinnen und Schüler müssen ihre Kenntnisse über Wurzelfunktionen anwenden. Das Arbeiten mit Fallunterscheidungen wird geübt.
Der Wurzelsatz von Vieta für quadratische Polynome (nur die Richtung $\Rightarrow$) soll von den Schülerinnen und Schülern induktiv erarbeitet werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen dazu mathematische Größen strukturieren und Zusammenhänge erkennen. Die Voraussetzung und die Behauptung des vermuteten Satzes müssen von den Schülerinnen und Schülern aufstellt werden. Das Formulieren von mathematischen Sätzen wird geübt. Bei der Beweisführung des Satzes müssen die Lernenden auf bekannte Tatsachen zurückgreifen und logische Schlüsse ziehen. Der direkte Beweis als Beweisverfahren wird geschult. Innermathematische Anwendungen des Satzes sollen die Schülerinnen und Schüler vom Sinn und Nutzen des Satzes überzeugen.

4. Angestrebtes Unterrichtsergebnis

Die Schülerinnen und Schüler

- erfahren und schätzen, dass quadratische Funktionen in der Praxis Anwendung finden.
- erfahren, dass reale Vorgänge mit Computerprogrammen simuliert werden können.
- erkennen und schätzen Vorteile von Simulationen.
- können die Nullstellen einer quadratischen Funktion berechnen.
- kennen den Begriff der Diskriminante einer quadratischen Funktion.
- kennen den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Diskriminante.
- kennen den Wurzelsatz von Vieta für quadratische Funktionen.
- können den Wurzelsatz von Vieta für quadratische Funktionen beweisen.
- kennen eine Anwendung des Wurzelsatzes von Vieta.

5. Überlegungen zur Methode

Einstieg in die Unterrichtsstunde bildet eine Aufgabe mit Praxisbezug. Die Berechnung der Nullstellen beim senkrechten Wurf soll die Schülerinnen und Schüler motivieren, sich mit Nullstellen quadratischer Funktionen zu beschäftigen. Die üblicherweise für den senkrechten Wurf verwendete Gleichung $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0$ wird in einer anderen Form benutzt. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 wird durch die Steighöhe $s_h = \frac{v_0^2}{2g}$ ersetzt.

Die Gleichung wird in der Form $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{2gs_h} \cdot t + h_0$ verwendet, da sich ein Weg besser schätzen lässt, als eine Geschwindigkeit.
Die meisten Schülerinnen und Schüler werden sich angesichts solch einer auf den ersten Blick komplizierten Formel und der wahrscheinlich unliebsamen Physik überfordert fühlen. Hier muss durch den Unterrichtenden schnell gegengesteuert werden, um die Motivation, die durch die Aufgabenstellung und durch die Versuchsdurchführung hervorgebracht wurde, nicht ungenutzt zu lassen. Deshalb werden die Konstanten sofort durch Werte ersetzt. Die Steighöhe s_h und die Anfangshöhe h_0 werden grob geschätzt, da sonst ein für das Messen dieser Größen komplizierter Versuchsaufbau notwendig wäre, der von den mathematischen Inhalten ablenken würde.
Die Schülerinnen und Schüler sollen nach kurzer Erläuterung der Gleichung die im Vorfeld geschätzte Zeit vom Werfen bis zum Auftreffen eines Balls auf den Boden berechnen. Dazu müssen die Lernenden den Nullstellenbegriff in einem praktischen Kontext anwenden. Es kann es sich als notwendig erweisen, dass der Lehrer gezielte Hinweise geben muss, falls die Lernenden zu keinem Lösungsansatz gelangen. Es wird eine Computersimulation eingesetzt, um den praktischen Versuch mit der quadratischen Funktion h(t) visuell zu verbinden. Der Einsatz ist im Anschluss an die Berechnung geplant, kann aber auch vorher zur Erarbeitung des Lösungsansatzes herangezogen werden.
Nachdem das Stundenthema herausgestellt, die Formel zur Berechnung der Nullstellen und die Definition der Diskriminante kurz wiederholt wurden, werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, Kriterien mittels der Diskriminante für die Anzahl der Nullstellen anzugeben. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Kriterien nicht induktiv erarbeiten. Vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler abstrakt, mit Hilfe der gegebenen Gleichungen, die Aufgabe bewältigen. Dies wird nicht allen Lernenden gelingen. Nachdem die Kriterien formuliert wurden, sollen auch die Schülerinnen und Schüler, die die logischen Schlüsse beim Aufstellen der Beziehungen zwischen der Diskriminante und der Anzahl der Nullstellen nicht nachvollziehen konnten, von der Richtigkeit anschaulich überzeugt werden. Es wird ein Pascal-Programm eingesetzt, dass eine quadratische Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem darstellt. Die Parameter der Normalform p und q können in festen Schritten verändert werden. Das Programm gibt außerdem die Diskriminante und die Nullstellen aus, so dass der Verlauf der Parabel, die Nullstellen und die Diskriminante direkt verglichen werden können. Die Festigung der erarbeiteten Zusammenhänge soll zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.
Mit der Motivation, die Berechnung der Nullstellen quadratischer Funktionen zu üben, wird von den Schülerinnen und Schülern eine Tabelle erstellt, in die zu einzelnen vorgegebenen quadratischen Funktionen die Nullstellen und die Parameter p und q der Normalform geschrieben werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun anhand der 10 Zeilen der Tabelle eine Vermutung finden, wie die Nullstellen mit dem Parameter p und mit dem Parameter q zusammenhängen. Eine Beziehung, in der ein Zusammenhang zwischen p, q und den Nullstellen besteht, kennen die Lernenden bereits. Den Schülerinnen und Schülern muss an dieser Stelle deutlich gemacht werden, dass zwei einzelne Beziehungen gesucht sind: zwischen p und den Nullstellen und zwischen q und den Nullstellen. Von der Kreativität der Schülerinnen und Schüler hängt ab, wie viele Hilfen der Lehrer geben wird. Die aufgestellten Vermutungen werden im Unterrichtsgespräch widerlegt bzw. mit Hilfe eines Pascal-Programms induktiv bestätigt. Mit dem oben beschriebenen Pascal-Programm werden nun parallel zu den Parametern p und q auch die Summe und das Produkt der Nullstellen ausgegeben. Mit der Begründung, dass auch ein Rechner nicht alle Werte für p und q schrittweise abarbeiten kann, werden die Lernenden aufgefordert, die Vermutung zu beweisen. Die Beweisidee soll im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden. Viele Schülerinnen und Schüler würden, wenn sie nicht sofort einen Lösungsansatz finden, sich hier auf die leistungsstärkeren Mitschülerinnen und Mitschüler verlassen und die Arbeitszeit absitzen. Für das völlig selbständige Finden der Beweisidee müsste den Schülerinnen und Schülern mehr Zeit eingeräumt werden. Dies wäre in einer Stunde möglich, in der nur der Wurzelsatz von Vieta behandelt wird. Alternativ kann man den Beweis auch als Hausaufgabe stellen. Die meisten Schülerinnen und Schüler werden dann jedoch wahrscheinlich nicht die notwendige Anstrengungsbereitschaft aufbringen, länger als 5 Minuten nach einer Beweisidee zu suchen.
Der Beweisdurchführung soll möglichst durch jeden Lernenden allein erfolgen. Nachdem die Beweisidee deutlich herausgearbeitet wurde, sollte jeder Lernende in der Lage sein, den Beweis durchzuführen. Es wird einige Lernende geben, die sich verrechnen oder an einer Stelle nicht weiter wissen. Hilfestellungen von Mitschülerinnen und Mitschülern werden deshalb nicht unterbunden.
Am Ende der Stunde soll der Satz durch Aufgaben gefestigt werden. Von der noch bleibenden Unterrichtszeit wird abhängen, wie viele Aufgaben geübt werden.
Zu Hause sollen die Schülerinnen und Schüler quadratische Funktionen bezüglich der Anzahl der Nullstellen untersuchen. Diese Hausaufgabe wurde gewählt, weil in der Stunde zu diesem Thema keine Festigung erfolgte.

6. Verlaufsplanung

Zeit	Inhalt	Methoden	Medien und Hilfsmittel
08:30	• Bestimmen der Nullstellen beim senkrechten Wurf	UG, EA	DE, Tafel, PC
08:40	• Vergleich der Ergebnisse	UG	Tafel
	• Wie viele Nullstellen besitzt eine quadratische Funktion? - Begriff Diskriminante - Zusammenhang: Anzahl der Nullstellen ↔ Diskriminante	UG LV UG	Tafel, PC
08:50	• Berechnen von Nullstellen quadratischer Funktionen • Zusammentragen der Ergebnisse	EA, UG	Tafel, Projektor
	• Finden von Beziehungen zwischen den Nullstellen und den Parametern p und q einer quadratischen Funktion • Wurzelsatz von Vieta formulieren • Wurzelsatz von Vieta beweisen	UG, EA UG UG, EA	Tafel, PC
09:10	• Anwendungen des Wurzelsatzes von Vieta	EA	

HA: S. 163/C27

Abbruchmöglichkeiten und Alternativen:

- Anwendungen des Wurzelsatzes von Vieta werden in die Hausaufgabe verlagert.
- Der Beweis des Wurzelsatzes von Vieta wird in die Hausaufgabe verlagert.

- Der Beweis des Wurzelsatzes von Vieta wird von den Lernenden völlig selbständig erarbeitet.
- Es erfolgen weitere Übungen zum Wurzelsatz von Vieta.
- Die Umkehrung des Wurzelsatzes von Vieta wird betrachtet.
- Die Lösungsformel für die Berechnung der Nullstellen wird aus der Normalform einer quadratischen Funktion abgeleitet.
- Eine Formel zur Berechnung der Nullstellen wird aus der Scheitelpunktform abgeleitet.

7. Literatur und Medien

- Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik Mecklenburg-Vorpommern Klassenstufe 11-13
- Lehrbuch Mathematik 11 Mecklenburg Vorpommern; Paetec 1999
- Lehrbuch Analysis Grundkurs; Volk und Wissen 1997
- Lehrbuch Mathematik Heute Grundkurs Analysis Gesamtband; Schroedel 1991
- Heuser: Lehrbuch der Analysis; B. G. Teubner, Stuttgard 1998
- Bronstein, Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch 1997

8. Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

- UG .... Unterrichtsgespräch
- LV .... Lehrervortrag
- EA .... Einzelarbeit
- DE .... Demonstrationsexperiment
- PC..... Personalcomputer

9. Tafelbild

Es werden nur wesentliche Elemente vorgestellt, da das Tafelbild durch den Einfluss der Schülerinnen und Schüler variieren kann.

Senkrechter Wurf:

$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{2gs_h} \cdot t + h_0$

Steighöhe $s_h \approx 2$m; Anfangshöhe $h_0 \approx 1$m; Fallbeschleunigung g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$

h(t)...Höhe des Gegenstandes als Funktion der Zeit

$h(t) = -4{,}905 \cdot t^2 + 6{,}26 \cdot t + 1$ $\quad 0 = -4{,}905 \cdot t^2 + 6{,}26 \cdot t + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = t^2 - 1{,}28 \cdot t - 0{,}20 \quad \Rightarrow$

$t_1 = 0{,}64 + 0{,}78 = 1{,}42$

$t_2 = 0{,}64 - 0{,}78 = -0{,}14$ entfällt

<u>Nullstellen quadratischer Funktionen</u>

$f(x) = x^2 + px + q \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Diskriminante: $D = \frac{p^2}{4} - q \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

D>0 $\Rightarrow$ 2 Nullstellen

D=0 $\Rightarrow$ 1 Nullstelle

D<0 $\Rightarrow$ keine Nullstelle

Nullstellensatz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + px + q$, so gilt: $x_1 \cdot x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$.

<u>Beweis:</u> x_1, x_2 Nullstellen von f $\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \ldots = q$$

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \ldots = -p$$

10. Arbeitsblätter

	Funktion	p	q	Nullstelle x_1	Nullstelle x_2		
1	$f(x) = x^2 - 5x + 6$						
2	$f(x) = x^2 + 4x + 3$						
3	$f(x) = x^2 - x - 12$						
4	$f(x) = x^2 - 169$						
5	$f(x) = x^2 + 169$						
6	$f(x) = x^2 + x - 2$						
7	$f(x) = x^2 - 12x - 13$						
8	$f(x) = (x+6)^2 - 47$						
9	$f(x) = x^2 - 8x - 20$						
10	$f(x) = (x-25)(x+36)$						