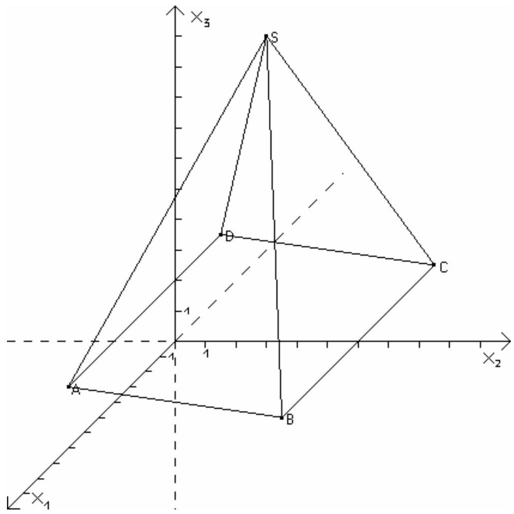
P1 Geometrie

A(5;-1;1), B(3;5;-1) C(-3;7;1), D(-1;1;3), S(10;8;15)

1.1

Zeichnung:

(Unsichtbare Kanten: $\overline{AD}$, $\overline{DS}$, $\overline{CD}$)



A, B, C, D sind Eckpunkte eines Parallelogramms, wenn je zwei der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ parallel bzw. antiparallel, d.h. linear abhängig sind. (A, B, C und D liegen in einer Ebene, weil laut Aufgabenstellung die Pyramide die Grundfläche ABCD besitzt.)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\6\\-2\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}6\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$ $\Rightarrow$ ABCD ist ein Parallelogramm

Für ein Rechteck ist ein rechter Innenwinkel notwendig: $\sphericalangle DAB=90° \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=0$

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-2\\6\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix}=12+12-4=20\neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sphericalangle DAB\neq 90° \qquad \Rightarrow \qquad \text{ABCD ist kein Rechteck}$$

Flächeninhalt:

$$F=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}16\\16\\32\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1536}=16\cdot\sqrt{6}$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt $16\cdot\sqrt{6}$ FE.

1.2

$P(3;\, y_p;\, z_p)$ auf $\overline{AC}$

g(AC): $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+r'\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad r', r \in \Re$

P ∈ g(AC): $\begin{pmatrix}3\\y_p\\z_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ r = 2 $\Rightarrow$ $y_p = 1$ und $z_p = 1 \Rightarrow P(3;\, 1;\, 1)$

Da P in der Ebene E(ABCD) liegt, ist $\overline{PS}$ die Höhe der Pyramide, wenn $\overrightarrow{PS}\perp E(ABCD)$ bzw. $\overrightarrow{PS}$ von $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ linear abhängig ist.

$$\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}7\\7\\14\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}16\\16\\32\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{PS}=\frac{7}{16}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\Rightarrow \overline{PS}\text{ ist Höhe der Pyramide}$$

1.3

Q(0; y_q; z_q)

h(BC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $s \in \Re$

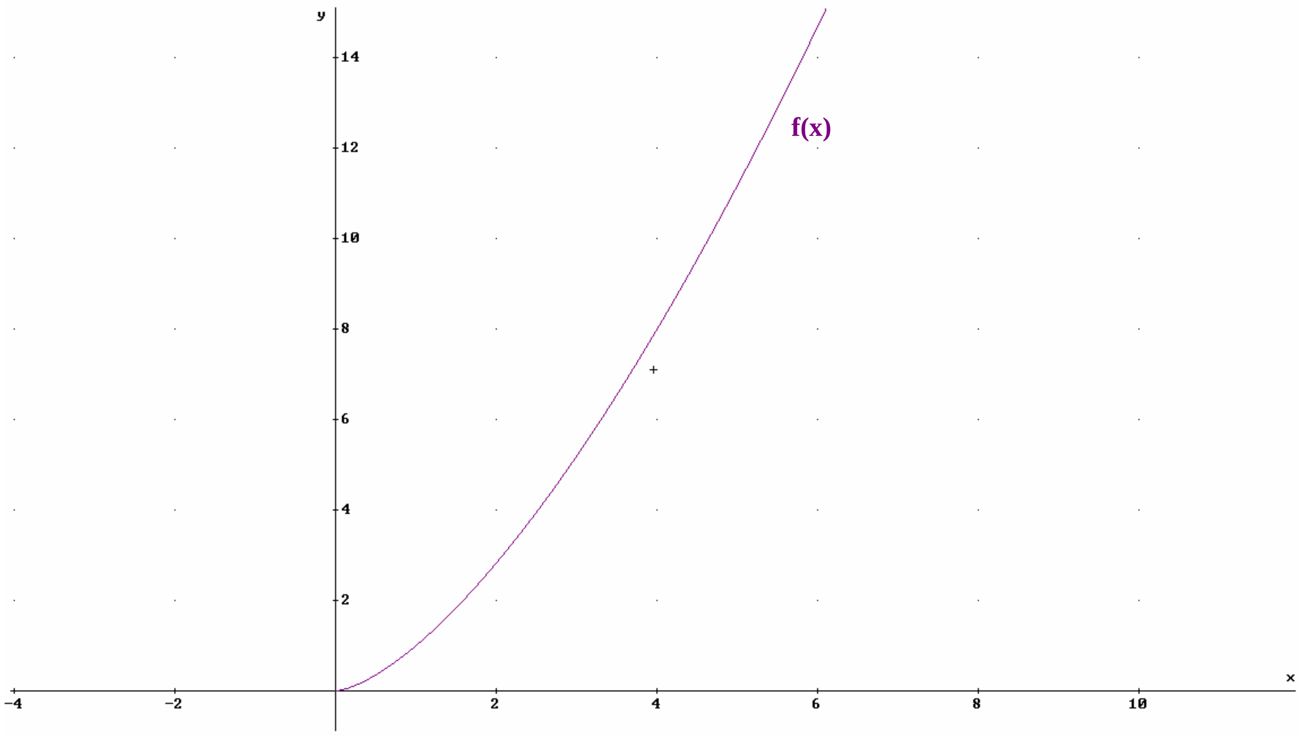
Q ∈ h(BC): $\begin{pmatrix} 0 \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ Q(0; 6; 0)

P2 Analysis

$f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ $x \in \Re, x \geq 0$

2.1.1

Skizze:



2.1.2

P(4; 8)

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ Anstieg der Tangente: $f'(4) = 3$

Sekantengleichung durch O(0; 0): $y = 3x$

Schnittstellen der Sekante mit f(x): $3x = x\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \left(3 - \sqrt{x}\right) = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$

Flächeninhalt: $F = \left| \int_0^9 f(x) - g(x)dx \right| = \left| \int_0^9 x^{\frac{3}{2}} - 3xdx \right| = \left| \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^9 \right| = \left| \left[x^2 \left(\frac{2}{5}\sqrt{x} - \frac{3}{2} \right) \right]_0^9 \right| = \left| -\frac{243}{10} \right| = 24\frac{3}{10}$

Der Flächeninhalt beträgt 24,3 FE.

2.2

Seitenlängen: (a_n) Flächeninhalte: (A_n) $A_{n+1} = \frac{1}{3} A_n$ $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$

2.2.1

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot \sqrt{a_1^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a_1^2$$

Es handelt sich um eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten $q = \frac{1}{3}$.

Explizite Bildungsvorschrift: $A_n = A_1 \cdot q^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} a_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$A_n < 5 \cdot 10^{-5} A_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{5}}{4} a_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5} \cdot a_1^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{20000}$$

$$\Rightarrow \quad n > 10{,}015$$

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$ gilt $A_n < 5 \cdot 10^{-5} A_1$.

2.2.2

S_n ist eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{1}{3}$. Da $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ konvergiert die Reihe. Sie hat dann die Summe

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} A_1 = \frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot a_1^2$$

P3 Stochastik

p = P(Nebenwirkungen) = 0,06
ZG X…Anzahl der Fälle mit unerwünschten Nebenwirkungen

3.1

$$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}06 = 3$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}94^{50} - 50 \cdot 0{,}06^1 \cdot 0{,}94^{49} \approx 0{,}81$$

Es sind 3 Fälle unerwünschter Nebenwirkungen bei der Anwendung des Medikaments an 50 Patienten zu erwarten. Mehr als ein Fall unerwünschter Nebenwirkungen tritt bei 50 Patienten mit einer Wahrscheinlichkeit von 81% auf.

3.2

X ist $B_{n;\,0,06}$-verteilt.

$$P(X \geq 1) > 0{,}5$$
$$1 - P(X = 0) > 0{,}5$$
$$P(X = 0) < 0{,}5$$
$$0{,}94^n < 0{,}5$$
$$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}94}$$
$$n > 11{,}2$$

Bei 12 Patienten überschreitet die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mindestens eines Falles unerwünschter Nebenwirkungen erstmals 50%.

3.3

Rechtsseitiger Signifikanztest

H_0: $p \leq 0{,}04$ H_1: $p > 0{,}04$

H_0 wahr $\Rightarrow$ X ist $B_{100;\,0{,}04}$ – verteilt

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{k_r; k_r + 1; ...; 100\}$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

$$P(X \geq k_r) \leq \alpha$$

$$1 - P(X \leq k_r - 1) \leq \alpha$$

$$P(X \leq k_r - 1) \geq 1 - \alpha$$

$$B_{100;0{,}04}(\{0;1;...;k_r - 1\}) \geq 0{,}95$$

Tabelle Binomialverteilung: $B_{100;0{,}04}(\{0;1;...;6\}) = 0{,}8936$

$B_{100;0{,}04}(\{0;1;...;7\}) = 0{,}9525$

$\Rightarrow$ $k_r - 1 = 7$ $\Rightarrow$ $k_r = 8$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{8;9;...;100\}$

Testentscheidung: $7 \notin \overline{A}$ $\Rightarrow$ H_0 kann nicht signifikant abgelehnt werden.

Man kann auf Grund der Stichprobe nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% schließen, dass bei mehr als 4% aller Fälle unerwünschte Nebenwirkungen auftreten.

A4 Analysis

$$f_a(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x + 2} \qquad x \in \Re,\ x \neq -2,\ a \in \Re,\ a \neq 0$$

4.1

Schnittpunkte mit Abszissenachse:

$x^2 + 2x + a = 0$ $\Rightarrow$ $x_{01,02} = -1 \pm \sqrt{1-a}$ $\Rightarrow$ $S_{x1}\left(-1+\sqrt{1-a};0\right)$ $S_{x2}\left(-1-\sqrt{1-a};0\right)$

Für a > 1 existieren keine Schnittpunkte mit der Abszissenachse.

Für a = 1 existiert genau ein Schnittpunkt mit der Abszissenachse: $S_x(-1;0)$

Für a < 1 existieren die zwei angegebenen Schnittpunkte mit der Abszissenachse.

Der Nenner von $f_a(x)$ wird 0, wenn x = 2 ist. Das ist nur für den laut Definition ausgeschlossenen Fall a = 0 der Fall.

Schnittpunkte mit Ordinatenachse:

$f_a(0) = \frac{a}{2}$ $S_y\left(0;\frac{a}{2}\right)$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+a}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2+\frac{a}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\pm\infty+2+0}{1+0} = \pm\infty$$

Asymptoten:

Polasymptote: $x = -2$

Weitere Asymptote:

$$(x^2+2x+a):(x+2) = x + \frac{a}{x+2}$$

$\underline{-x^2 - 2x}$ $\Rightarrow$ weitere Asymptote: $y = x$

a

4.2

Ableitungen:

$$f_a(x) = \frac{x^2+2x+a}{x+2}$$

$$f_a'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+2)-(x^2+2x+a)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+4-a}{(x+2)^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2-2(x^2+4x+4-a)(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2)-2(x^2+4x+4-a)}{(x+2)^3} = \frac{2a}{(x+2)^3}$$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2+4x+4-a}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+4x+4-a = 0 \qquad \text{und } x \neq -2$$

$$\Rightarrow \qquad x_{E1,E2} = -2 \pm \sqrt{4-4+a} = -2 \pm \sqrt{a}$$

$$f_a''(-2\pm\sqrt{a}) = \frac{2a}{\left(-2\pm\sqrt{a}+2\right)^3} = \frac{2a}{\left(\pm\sqrt{a}\right)^3} = \frac{2a}{\pm a\sqrt{a}} = \pm\frac{2\sqrt{a}}{a} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Für $a \in \Re$, $a > 0$ besitzt G_a zwei lokale Extrempunkte (einen Maximum- und einen Minimumpunkt). Ansonsten hat G_a keine Extrempunkte.

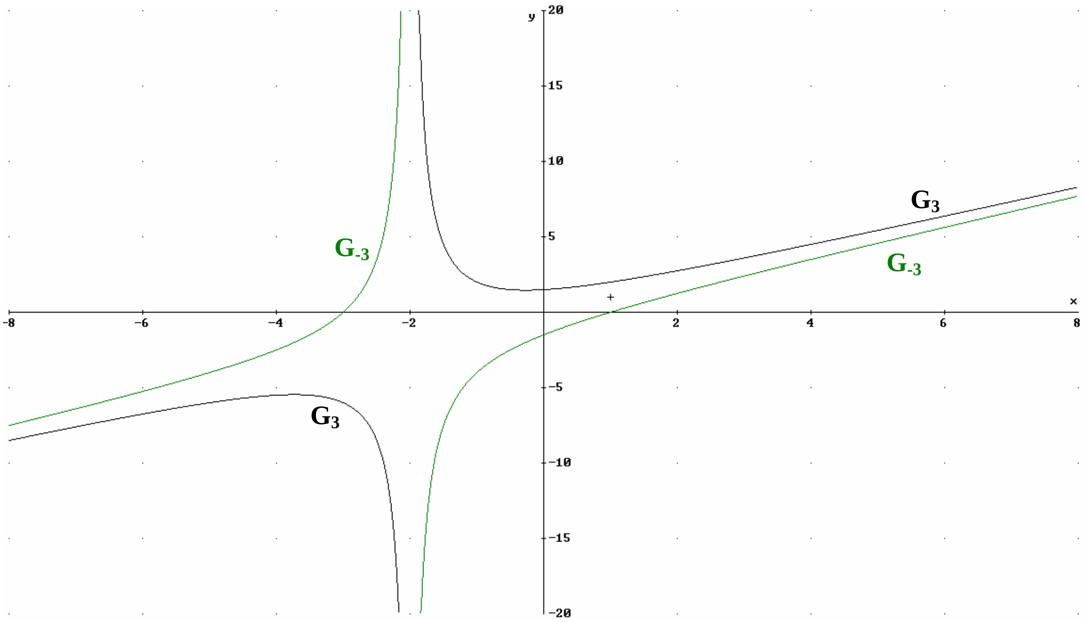
Wendepunkte:

$$f_a''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2a}{(x+2)^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2a = 0 \quad \Rightarrow \qquad a = 0$$

a = 0 ist laut Definition ausgeschlossen

$\Rightarrow$ G_a besitzt keine Wendepunkte.

4.3



4.4

$f_{-3}(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$ $\qquad S_{x1}(1;0)$ $\qquad S_y\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$ $\qquad F=\left|\int_0^1 f_a(x)dx\right|=\left|\int_0^1 \dfrac{x^2+2x-3}{x+2}dx\right|$

$$\int \frac{x^2+2x-3}{x+2}dx=\int x-\frac{3}{x+2}dx=\frac{1}{2}x^2-3\ln(x+2)+c \qquad \text{mit } c\in\Re$$

$$F=\left|\int_0^1 f_a(x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}x^2-3\ln(x+2)\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{2}-3\ln 3+3\ln 2\right|=\left|\frac{1}{2}-3\ln\frac{3}{2}\right|=3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\left(3\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)FE\approx 0,72FE$.

4.5

A(-2; 0), B(x; 0), C(x; f_3(x)) $\qquad$ x > -2 $\qquad f_3(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$

Die Punkte A und B liegen auf der Abszissenachse. Der Punkt C hat dieselbe x-Koordinate wie B. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

Flächeninhalt des Dreiecks: $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot f_3(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$

$F'(x)=x+1$

$F''(x)=1>0 \quad\Rightarrow\quad$ Minimum

$F'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$

Für x = -1 ist der Flächeninhalt des Dreiecks minimal. (Der minimale Flächeninhalt beträgt 1 FE.)

A5 Analysis

5.1

$f_a(x)=x\ln x-ax$ $\qquad$ a ∈ ℜ, a > 0

5.1.1

Definitionsbereich: $\qquad$ x ∈ ℜ, x > 0

Schnittpunkte mit der Abszissenachse:

$f_a(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ln x-ax=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(\ln x-a)=0$

$x_{01}=0$ entfällt (x > 0) $\qquad \ln x-a=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x=a \quad\Rightarrow\quad x_{02}=e^a$

$S_{x0}(e^a;0)$

Ableitungen:

$f_a(x)=x\ln x-ax \qquad f_a'(x)=\ln x+1-a \qquad f_a''(x)=\dfrac{1}{x}$

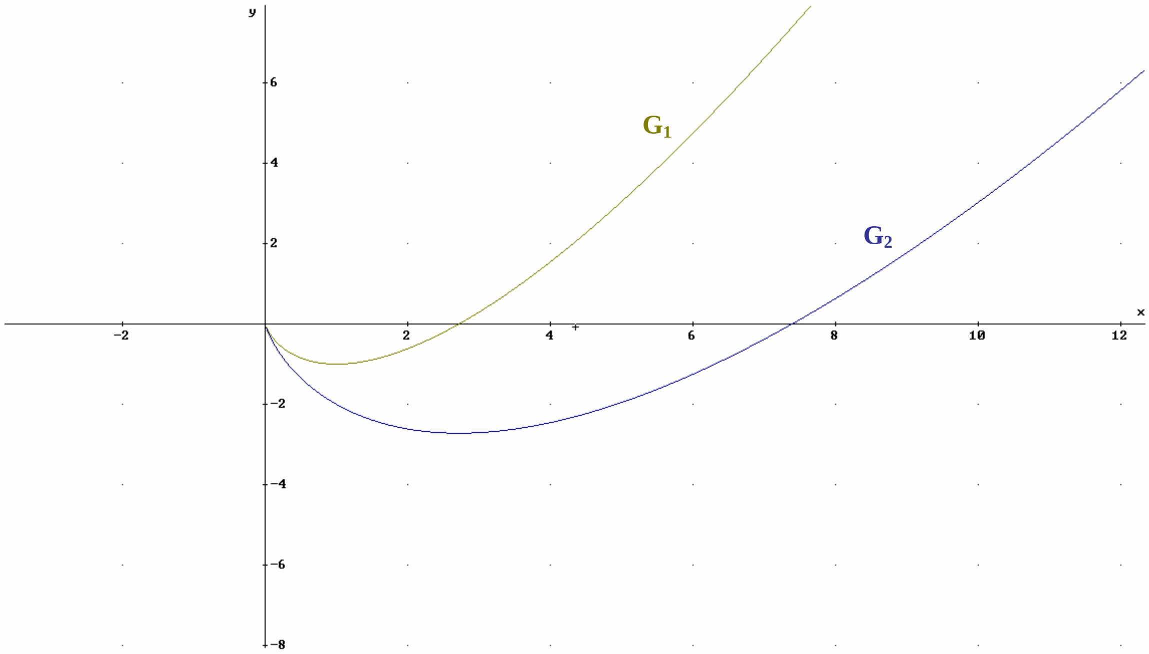
Extrempunkte:

$f_a'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x+1-a=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x=a-1 \quad\Rightarrow\quad x_E=e^{a-1}$

$f_a''(x_E)=f_a''(e^{a-1})=\dfrac{1}{e^{a-1}}>0 \quad\Rightarrow\quad$ Minimum

$f_a(x)=-e^{a-1} \qquad P_{Min}\left(e^{a-1};-e^{a-1}\right)$

Skizze:



5.1.2

Partielle Integration: $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$

$u(x) = \ln x \qquad v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v'(x) = x$

$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c \qquad c \in \Re$

Flächeninhalt: x = 1 $\quad S_{x0}\left(e^a;0\right)$

$$F = \left|\int_1^{e^a} f_a(x)dx\right| = \left|\int_1^{e^a} x\ln x - axdx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{a}{2}x^2\right]_1^{e^a}\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2} - a\right)\right]_1^{e^a}\right|$$

$$= \left|-\frac{e^{2a}}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - a\right)\right| = \left|-\frac{e^{2a} - 1 - 2a}{4}\right|$$

5.1.3

$f_1(x) = x\ln x - x = x(\ln x - 1) \qquad P\left(e^2;e^2\right) \qquad f_1'(x) = \ln x \qquad f_1'(e^2) = 2 \qquad y = mx + n$

Tangente:

$e^2 = 2e^2 + n \quad \Rightarrow \quad n = -e^2 \qquad$ t: $y = 2x - e^2$

Normale:

$m_t \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = -\frac{1}{2}$

$e^2 = -\frac{1}{2}e^2 + n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3}{2}e^2 \qquad$ n: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e^2$

5.2

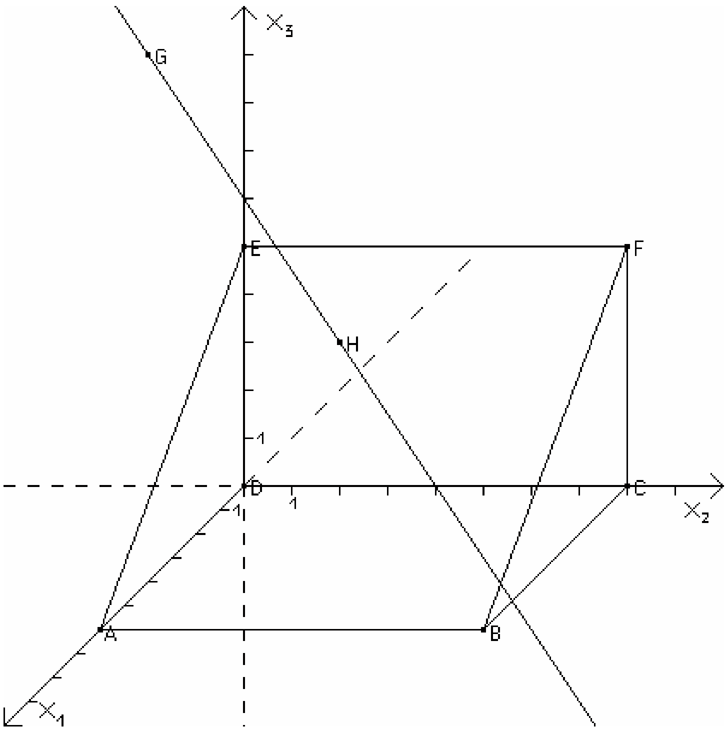
Zuordnung	Begründung
g ist 1. Ableitung von h	h hat an den Stellen -2; 0 und 2 lokale Extrempunkte. Dort muss die 1. Ableitung Null werden. Die Funktion g erfüllt diese Bedingungen. Weder die Funktion f noch k haben an allen diesen Stellen Nullstellen.
k ist 1. Ableitung von f	f hat an zwischen -3 und -2, bei -1 und zwischen 0 und 1 lokale Extrempunkte. Hier liegen auch die Nullstellen der Funktion k. Keine der Funktionen g und h hat an allen diesen Stellen Nullstellen.
Keine Funktion kann Ableitungsfunktion von g sein, denn weder f noch k noch h haben Nullstellen bei -1 und 1, wo zwei Extrempunkte von g liegen. Keine Funktion kann Ableitungsfunktion von k sein, denn weder f noch g noch h haben Nullstellen bei -2 und 1, wo zwei Extrempunkte von k liegen. Daher bleibt die oben angegebene Zuordnung die einzig mögliche.	

A6 Geometrie

A(6; 0; 0), B(6; 8; 0), C(0; 8; 0), D(0; 0; 0), E(0; 0; 5), F(0; 8; 5)
G(0; -2; 9), H(2; 3; 4)

6.1

Zeichnung:



6.2

Gerade g(GH):

$$g(GH):\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad r \in \Re$$

Ebene ABFE:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix} \qquad \text{Normalenvektor der Ebene ABFE: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A $\in$ ABFE: $5 \cdot 6 = 30$

Ebenengleichung E(ABFE): $5x + 6z = 30$

Schnittpunkt g und Ebene ABFE:

$$5\cdot 2r+6\cdot(9-5r)=30 \quad\Rightarrow\quad 20r=24 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{6}{5}$$

$$\overrightarrow{x_S}=\begin{pmatrix}0\\-2\\9\end{pmatrix}+\frac{6}{5}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\4\\3\end{pmatrix} \qquad S\left(\frac{12}{5};4;3\right)$$

Schnittwinkel:

$$\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix}\right|}=\frac{-20}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{61}}$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 110{,}4°$

$\Rightarrow \quad \beta = 180° - \alpha = 69{,}6°$

Schnittwinkel: $\gamma = 90° - \beta = 20{,}4°$

Alternative Rechnung:

$$\sin\gamma=\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-20|}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{61}}$$

$\Rightarrow \quad \gamma = 20{,}4°$

6.3

Gerade h:

$$\text{h(AB):}\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \qquad s\in\Re$$

Einheitsvektor senkrecht zu den Richtungsvektoren der Geraden:

$$\vec{n}_0\perp\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\text{ und }\vec{n}_0\perp\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\text{ und }|\vec{n}_0|=1 \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\5\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\0\\16\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}_1=\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$$

Abstand der Geraden g und h:

$$\text{Abstand:}\qquad d=\left|\left[\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\9\end{pmatrix}\right]\bullet\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}6\\2\\-9\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{29}}\cdot(30-18)=\frac{12\sqrt{29}}{29}$$

Der Abstand zwischen den Geraden g und h beträgt $\frac{12\sqrt{29}}{29}$ LE.

6.4

Ebene ε_k: $\quad kx+3y=24 \quad k\in\Re$

$C\in\varepsilon_k$: $\quad k\cdot 0+3\cdot 8=24$ wahre Aussage für alle $k\in\Re$
$F\in\varepsilon_k$: $\quad k\cdot 0+3\cdot 8=24$ wahre Aussage für alle $k\in\Re$

Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$:

$$\vec{x}_M=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix} \qquad\Rightarrow\qquad M(6;\,4;\,0)$$

Ebene ε_k: $\quad k\cdot 6+3\cdot 4=24 \quad\Rightarrow\quad k=2$

Die Ebene ε_2: $2x+3y=24$ verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

6.5

P(6; y_p; 0) $\in \overline{AB}$ Volumen der Pyramide PBCF: 10VE

$$V = \left| \frac{1}{6} \cdot \left[\left(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC} \right) \bullet \overrightarrow{PF} \right] \right| = 10$$

$$V = \left| \frac{1}{6} \cdot \left[\left(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC} \right) \bullet \overrightarrow{PF} \right] \right| = \left| \frac{1}{6} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 8-y_p \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 8-y_p \\ 0 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 8-y_p \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{6}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8-y_p \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 8-y_p \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| 5 \cdot \left(8-y_p \right) \right|$$

$\left| 5 \cdot \left(8-y_p \right) \right| = 10 \Rightarrow \quad \left| \left(8-y_p \right) \right| = 2 \quad \Rightarrow \quad y_{p1} = 6 \quad y_{p2} = 10$

Für die Werte $y_{p1} = 6$ und $y_{p2} = 10$ beträgt das Volumen der Pyramide PBCF genau 10VE.

B4 Analysis

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$P_{Min}(0; -8)$ $P_W(6; f(6))$ Wendetangente bei $x_w = 6$ mit m = 0 $f^{IV}(x) = 3$

4.1

Ableitungen:

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $\quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ $\quad f'''(x) = 24ax + 6b$ $\quad f^{IV}(x) = 24a$

(I): $P_{Min}(0; -8) \Rightarrow f(0) = -8 \Rightarrow e = -8$

(II): $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

(III): $P_W(6; f(6)) \Rightarrow f''(6) = 0 \Rightarrow 432a + 36b + 2c = 0 \Rightarrow 216a + 18b + c = 0$

(IV): Wendetangente bei $x_w = 6$ mit m = 0 $\Rightarrow f'(6) = 0 \Rightarrow 864a + 108b + 12c + d = 0$

(V): $f^{IV}(x) = 3 \Rightarrow 24a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

(V) in (III) $\Rightarrow c = -27 - 18b$

(II), (V) in (IV) $\Rightarrow 9b + c = -9 \Rightarrow 9b + \left(-27 - 18b \right) = -9$

$\Rightarrow b + -3 - 2b = -1$

$\Rightarrow b = -2 \Rightarrow c = -27 - 18 \cdot \left(-2 \right)$

$\Rightarrow c = 9$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8$

4.2

Ableitungen:

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 18x$ $\quad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$ $\quad f'''(x) = 3x - 12$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(x^2 - 12x + 36 \right) = 0$

$\Rightarrow x_{E1} = 0$ $\quad f''(0) = 18 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$\Rightarrow x_{E2,E3} = 6 \pm \sqrt{36 - 36} \Rightarrow x_{E2} = 6$ $\quad f''(6) = 0$

$f'''(6) = 6 > 0 \Rightarrow$ 6 ist keine Extremstelle.

$\Rightarrow$ Es gibt nur einen Extrempunkt $P_{Min}\left(0; -8 \right)$.

Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2-12x+18=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-8x+12=0$$

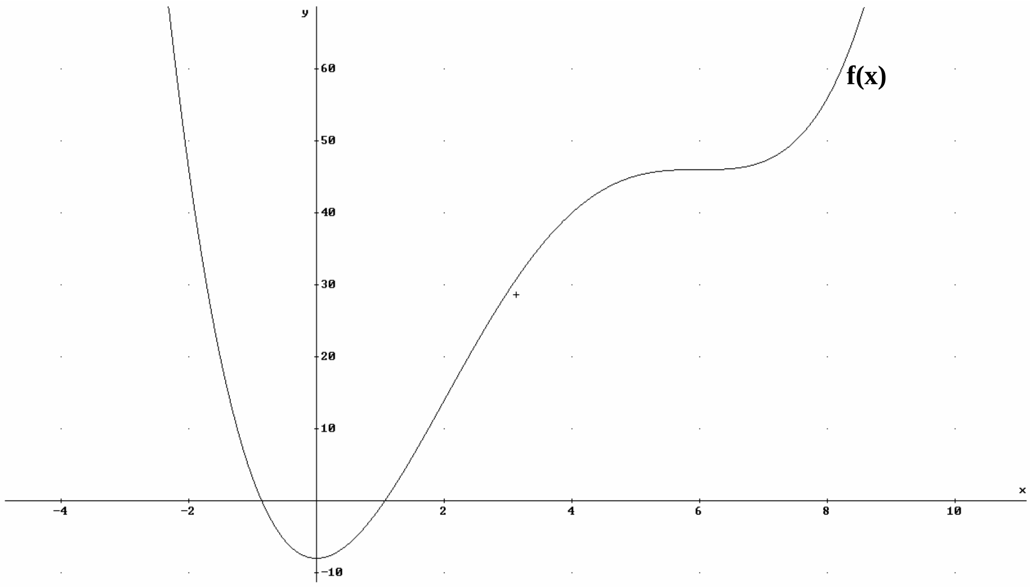
$$\Rightarrow \quad x_{W1,W2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2$$

$\Rightarrow$ $x_{W1}=6$ $\quad f'''(6)=6>0$ (konkav $\rightarrow$ konvex) $\quad f(6)=46$ $\quad P_{W1}(6;46)$

$\Rightarrow$ $x_{W2}=2$ $\quad f'''(2)=-6<0$ (konvex $\rightarrow$ konkav) $\quad f(2)=14$ $\quad P_{W1}(2;14)$

$f(-2)=46$

Skizze:



4.3

$$F=\left|\int_{-2}^{6}46-f(x)dx\right|=\left|\int_{-2}^{6}-\frac{1}{8}x^4+2x^3-9x^2+54dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{40}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{3}x^3+54x\right]_{-2}^{6}\right|=\left|\frac{648}{5}+\frac{376}{5}\right|=\frac{1024}{5}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{1024}{5}$ FE.

4.4

Newton-Verfahren: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{8}x^4-2x^3+9x^2-8$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^3-6x^2+18x$

$x_1=1$ $\qquad f(1)=-\frac{7}{8}$ $\qquad f'(1)=\frac{25}{2}$

$x_2=1{,}07$ $\qquad x_3=1{,}0686$ $\qquad x_4=1{,}0686$

Eine Nullstelle liegt bei 1,07.

B5 Analysis

$f_a(x)=x\cdot e^{a-x}$ $\qquad x\in\Re,\ a\in\Re,\ a\geq 0$

5.1

Ableitungen:

$$f_a'(x)=e^{a-x}-x\cdot e^{a-x}=(1-x)e^{a-x}$$

$$f_a''(x)=-e^{a-x}-(1-x)e^{a-x}=(-2+x)e^{a-x}$$

$$f_a'''(x)=e^{a-x}-(-2+x)e^{a-x}=(3-x)e^{a-x}$$

Extrempunkte:

$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)e^{a-x} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 1$

$f_a''(1) = (-2+1)e^{a-1} = -e^{a-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum

$f_a(1) = e^{a-1} \qquad P_{Max}\left(1; e^{a-1}\right)$

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2+x)e^{a-x} = 0 \Leftrightarrow \quad (-2+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2$

$f_a'''(2) = e^{a-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt konkav $\rightarrow$ konvex

$f_a(2) = 2 \cdot e^{a-2} \qquad P_W\left(2; 2e^{a-2}\right)$

5.2

Wendetangente:

$P_W\left(2; 2e^{a-2}\right) \qquad f_a'(2) = -e^{a-2} \qquad y = mx + n$

$2e^{a-2} = -e^{a-2} \cdot 2 + n \quad \Rightarrow \quad n = 4e^{a-2} \quad \Rightarrow \quad$ t_a: $\quad y = -e^{a-2}x + 4e^{a-2} = (-x+4)e^{a-2}$

5.3

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$-e^{a-2}x + 4e^{a-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-x+4)e^{a-2} = 0 \Leftrightarrow \quad (-x+4) = 0 \Rightarrow x_S = 4 \quad \Rightarrow \quad S_x(4;0)$

$y_S = (-0+4)e^{a-2} = 4e^{a-2} \qquad \Rightarrow \quad S_y\left(0; 4e^{a-2}\right)$

Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_xS_y}$: $M\left(x_M; y_M\right)$

$x_M = \frac{1}{2}x_S = 2 \qquad y_M = \frac{1}{2}y_S = 2e^{a-2} \quad \Rightarrow \quad M\left(2; 2e^{a-2}\right) = P_W\left(2; 2e^{a-2}\right)$

5.4

$f_2(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad f_3(x) = x \cdot e^{3-x} \qquad x = z$ mit z > 0

Gemeinsame Nullstelle von f_2 und f_3: x = 0

Flächeninhalt A(z):

$$A(z) = \left|\int_0^z f_3(x) - f_2(x)dx\right| = \left|\int_0^z x \cdot e^{3-x} - x \cdot e^{2-x}dx\right| = \left|\int_0^z x \cdot \left(e^{3-x} - e^{2-x}\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^z x \cdot \left(\frac{e^3}{e^x} - \frac{e^2}{e^x}\right)dx\right| = \left|\int_0^z x \cdot \left(\frac{e^3 - e^2}{e^x}\right)dx\right| = \left|\left(e^3 - e^2\right)\int_0^z x \cdot e^{-x}dx\right|$$

Partielle Integration: $\quad \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx \qquad \int x \cdot e^{-x}dx$

$u(x) = x \qquad v(x) = -e^{-x}$

$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^{-x}$

$\int x \cdot e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + c \qquad c \in \Re$

Flächeninhalt A(z):

$$A(z) = \left|\left(e^3 - e^2\right)\int_0^z x \cdot e^{-x}dx\right| = \left|\left(e^3 - e^2\right)\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^z\right| = \left|\left(e^3 - e^2\right)\left(-(z+1)e^{-z} + 1\right)\right|$$

$$= \left|\left(e^3 - e^2\right)\left(1 - \frac{(z+1)}{e^z}\right)\right| = \left(e^3 - e^2\right)\left(1 - \frac{(z+1)}{e^z}\right)$$

(Für z > 0 ist der Ausdruck innerhalb der Betragszeichen immer positiv.)

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty}\left(e^3 - e^2\right)\left(1 - \frac{(z+1)}{e^z}\right) = \left(e^3 - e^2\right)\lim_{z\to\infty}\left(1 - \frac{(z+1)}{e^z}\right)$$

$$= \left(e^3 - e^2\right)\left(\lim_{z\to\infty} 1 - \lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z} - \lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^z}\right) = \left(e^3 - e^2\right)(1-0-0) = e^3 - e^2 = e^2(e-1)$$

weil: $\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z} = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^z} = 0$ (Regel nach DE L' Hospital) (Zähler und Nenner von $\frac{z}{e^z}$ streben gegen ∞)

B6 Geometrie

A(5; 2; -1), B(-1; 10; 1), C(1; 0; 4) ε(ABC) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit t ∈ ℜ

6.1

Normalenvektor von ε(ABC):

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 22 \\ 44 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung der Ebene ε(ABC)

$2x + y + 2z = d$

C ∈ ε(ABC) $\Rightarrow$ $2\cdot 1 + 2\cdot 4 = d$ $\Rightarrow$ d = 10

ε(ABC): $2x + y + 2z = 10$

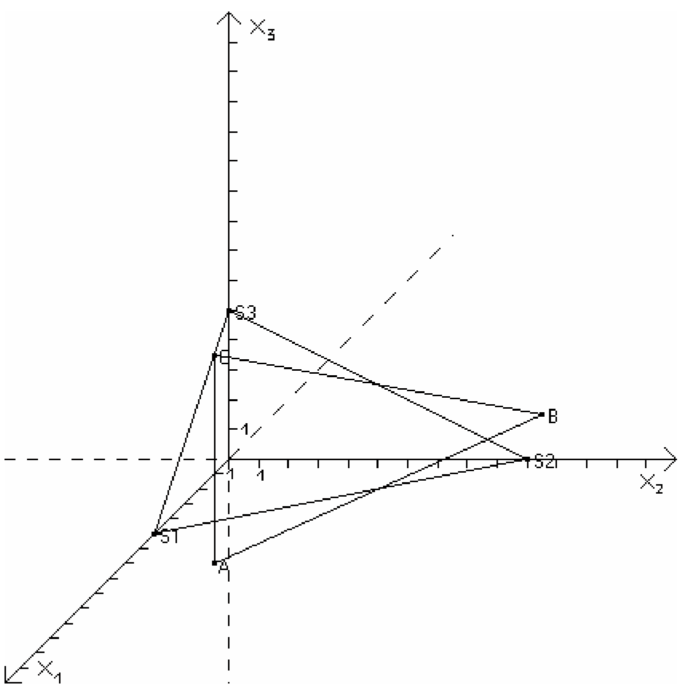
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$S_1 = S_x$: $2x = 10 \Rightarrow$ $x = 5$ $\Rightarrow$ $S_1(5;0;0)$

$S_2 = S_y$: $y = 10$ $\Rightarrow$ $S_2(0;10;0)$

$S_3 = S_z$: $2z = 10 \Rightarrow$ $z = 5$ $\Rightarrow$ $S_3(0;0;5)$

Zeichnung:



6.2

A(5; 2; -1), B_b(-1; b-1; b+4), C(1; 0; 4)

Gerade h(AC):

h(AC): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit r ∈ $\Re$

B_b ∈ h:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ b-1 \\ b+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad -1 = 5 - 4r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad b - 1 = 2 - 2r = 2 - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$\Rightarrow \quad b + 4 = -1 + 5r = -1 + \frac{15}{2} = \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5}{2}$ Widerspruch!

Es gibt keine Zahl b, so dass die Punkte A, B_b und C auf einer Geraden liegen.

6.3

ε(ABC): $2x + y + 2z = 10$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit t ∈ $\Re$

Schnittpunkt ε(ABC) mit g:

$2t + (-4 + 3t) + 2(-2 + 2t) = 10 \quad \Rightarrow \quad 9t = 18 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad S(2;2;2)$

6.4

Hessesche Normalenform von ε: $\frac{2x + y + 2z - 10}{3} = 0$ P(5; 1; 4)

Q(0; -4; -2) liegt auf der Geraden g und ist kein Punkt der Ebene ε. Q' sei das Spiegelbild des Punktes Q an der Ebene ε. Q' liegt dann auf der Geraden g'. Q' hat denselben Abstand von der Ebene ε, wie der Punkt Q von ε und liegt auf der Geraden k, die senkrecht zu ε durch Q verläuft.

Vorzeichenbehafteter Abstand des Punktes Q(0; -4; -2) von ε: $d = \frac{-4 + 2 \cdot (-2) - 10}{3} = -6$

Gerade k durch Q senkrecht zu ε: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ t' ∈ $\Re$

Der Punkt Q' muss von ε den vorzeichenbehafteten Abstand $d = 6$ besitzen und auf der Geraden k liegen:

$\frac{2x_{Q'} + y_{Q'} + 2 \cdot z_{Q'} - 10}{3} = 6$ und $\begin{pmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \\ z_{Q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \frac{2 \cdot 2t' + (-4 + t') + 2 \cdot (-2 + 2t') - 10}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad 9t' = 36 \quad \Rightarrow \quad t' = 4$

$\Rightarrow \quad Q'(8;0;6)$

Die Gerade g’ geht durch die Punkte $S(2;2;2)$ und $Q'(8;0;6)$:

g’: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ r’ $\in \Re$ $\Rightarrow$ g’: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ s’ $\in \Re$

P $\in$ g’?

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 5 = 2 + 3s' \quad \Rightarrow \quad s' = 1$

$\Rightarrow \quad 1 = 2 - 1s' \quad \Rightarrow \quad s' = 1$

$\Rightarrow \quad 4 = 2 + 2s' \quad \Rightarrow \quad s' = 1$

$\Rightarrow$ Der Punkt P(5; 1; 4) liegt auf der Geraden g’.