

P1 Analysis

$$k(x) = \sqrt{2-x^2} \quad x \in \mathfrak{R}, x^2 \leq 2 \qquad p(x) = ax^2 + bx + 1 \quad a, b, x \in \mathfrak{R}$$

1.1.1

Ableitungen:

$$k'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} \qquad p'(x) = 2ax + b$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} S(1;1): \quad p(1) &= 1 & \Leftrightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 1 & \Leftrightarrow & b = -a \\ & p'(1) = k'(1) & \Leftrightarrow & 2a \cdot 1 + b = \frac{-1}{\sqrt{2-1^2}} & \Leftrightarrow & 2a + b = -1 \\ \Rightarrow \quad 2a + (-a) &= -1 & \Rightarrow & a = -1 & \Rightarrow & b = 1 & \Rightarrow & p(x) = -x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

1.1.2

Gleichung der Tangenten t:

$$\begin{aligned} t: y &= m_t x + n_t \\ S(1;1): \quad m_t &= p'(1) = -1 \quad \text{und} \quad 1 = -1 \cdot 1 + n_t & \Rightarrow & n_t = 2 & \Rightarrow & t: y = -x + 2 \end{aligned}$$

1.1.3

Gleichung der Normalen n:

$$\begin{aligned} n: y &= m_n x + n_n \\ n \perp t: \quad m_n \cdot m_t &= -1 & \Rightarrow & m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{-1} = 1 \\ S(1;1): \quad 1 &= 1 \cdot 1 + n_n & \Rightarrow & n_n = 0 & \Rightarrow & n: y = x \end{aligned}$$

Schnittstellen von p und n:

$$p(x) = n(x) \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$A = \int_{-1}^1 (p(x) - n(x)) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 1 - x) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad (\text{FE})$$

1.2

$$p(x) = 3x^2 + 1$$

Berechnung von u:

$$\begin{aligned} 2 &= \int_{-1}^u p(x) dx = \int_{-1}^u (3x^2 + 1) dx = [x^3 + x]_{-1}^u = u^3 + u + 2 & \Rightarrow & u \cdot (u^2 + 1) = 0 & \Rightarrow & u = 0 \\ & & & & & & & & & u^2 + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

1.3

$$h(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c, x \in \mathfrak{R} \qquad h'(x) = 2ax + b$$

Berechnung von $h_a(x)$:

$$\begin{aligned} S(1;1): \quad h'_a(1) &= k'(1) & \Leftrightarrow & 2a \cdot 1 + b = -1 & \Rightarrow & b = -2a - 1 \\ & h_a(1) = 1 & \Leftrightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 & \Rightarrow & a + b + c = 1 \\ \Rightarrow \quad a + (-2a - 1) + c &= 1 & \Rightarrow & c = a + 2 & \Rightarrow & h_a(x) = ax^2 - (2a + 1)x + (a + 2) \end{aligned}$$

P2 Analytische Geometrie

$$A(0; -2; -4) \quad B(4; 0; 0) \quad C(3; 4; 2)$$

2.1

Koordinatengleichung der Ebene E:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow E: 2x + 2y - 3z = d$$

$$B \in E: \quad d = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 8 \Rightarrow E: 2x + 2y - 3z = 8$$

2.2

$$E_{xy}: z = 0 \quad \vec{n}_{E_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Winkels:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{E_{xy}}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{E_{xy}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = 43,31^\circ$$

2.3

$$\text{Hessesche Normalform von E: } \frac{2x + 2y - 3z - 8}{\sqrt{17}} = 0$$

Berechnung des Abstandes $O(0; 0; 0)$ von E:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 8}{\sqrt{17}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{17}} \right| = \frac{8}{17} \sqrt{17} \quad (\text{LE})$$

2.4Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{4+4+9} = 3\sqrt{17} \quad (\text{FE})$$

2.5

Berechnung von D:

$$\overline{OD} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AC} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t \leq 1, \text{ da } D \in \overline{AC}$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{AD}| \Rightarrow |\overline{AB}| = |\overline{OD} - \overline{OA}| \Rightarrow |\overline{AB}| = |(\overline{OA} + t \cdot \overline{AC}) - \overline{OA}| \Rightarrow |\overline{AB}| = |t \cdot \overline{AC}|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \Rightarrow \sqrt{16+4+16} = \left| \begin{pmatrix} 3t \\ 6t \\ 6t \end{pmatrix} \right| \Rightarrow \sqrt{36} = \sqrt{9t^2 + 36t^2 + 36t^2} \Rightarrow 36 = 81t^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{3} \text{ und } t_2 = -\frac{2}{3} \text{ (entfällt, da } t \geq 0) \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(2; 2; 0)$$

P3 Stochastik

3.1

Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y (Abbildungen 1 und 2):

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,30	0,50	0,15	0,05

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Zufallsvariable X_1 :

X_1 ist binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{6} \Rightarrow P(X_1 = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0,579$

$P(X = 0) \neq 0,579$ und $P(Y = 0) \neq 0,579 \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1 ist nicht dargestellt

Zufallsvariable X_2 :

X_2 nimmt den Wert 3 nicht an \Rightarrow Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 ist nicht dargestellt

Zufallsvariable X_3 :

X_1 ist binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X_1 = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125 = P(X_1 = 3)$

$P(X_1 = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} = 0,375 = P(X_1 = 2)$

\Rightarrow Wahrscheinlichkeiten stimmen mit denen von Y, aber nicht mit denen von X überein

\Rightarrow Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_3 wurde in Abbildung 2 dargestellt

Berechnung des Erwartungswertes und der Standardabweichung von X_3 :

$E(X_3) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \sigma(X_3) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.2

Verteilungsfunktionen von X und Y (Abbildungen 1 und 2):

$x \in$	$]-\infty; 0[$	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; \infty[$
F(x)	0	0,30	0,80	0,95	1

$y \in$	$]-\infty; 0[$	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; \infty[$
F(y)	0	0,125	0,500	0,875	1

Abbildung 3:

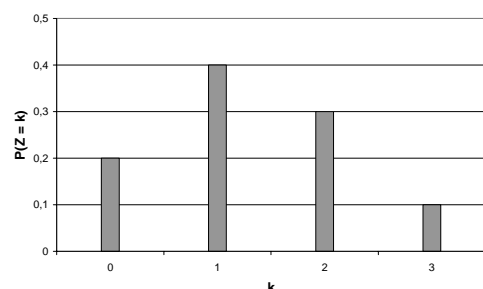
$F(0) = 0,2 \Rightarrow F(0) \neq 0,30$ und $F(0) \neq 0,125$
 \Rightarrow Keine der Zufallsvariablen X und Y passt zu Abbildung 3

Abbildung 4:

Werte stimmen mit denen der Zufallsvariablen X überein, aber nicht mit denen von Y
 \Rightarrow Verteilungsfunktion von X ist in Abbildung 4 dargestellt, Verteilungsfunktion von Y ist nicht dargestellt

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen Z aus Abbildung 3:

z_i	0	1	2	3
$P(Z = z_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1



W1 Analysis

$$f_a(x) = x \cdot e^{1-ax} \quad a, x \in \mathfrak{R}, a > 0, 0 \leq x \leq 11$$

1.1

Ableitungen:

$$f_a'(x) = 1 \cdot e^{1-ax} + x \cdot (-ae^{1-ax}) = (1-ax)e^{1-ax}$$

$$f_a''(x) = -a \cdot e^{1-ax} + (1-ax)(-ae^{1-ax}) = (a^2x - 2a)e^{1-ax}$$

$$f_a'''(x) = a^2e^{1-ax} + (a^2x - 2a)(-ae^{1-ax}) = (-a^3x + 3a^2)e^{1-ax}$$

Berechnung der Extrema:

$$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-ax)e^{1-ax} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \frac{1}{a}$$

$$f_a''\left(\frac{1}{a}\right) = \left(a^2 \cdot \frac{1}{a} - 2a\right)e^{1-a \cdot \frac{1}{a}} = -a < 0, \text{ da } a > 0 \quad \Rightarrow \quad x_E \text{ ist Maximumstelle}$$

$$f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot e^{1-a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1}{a}$$

Maximaler Durchmesser:

$$d = 2 \cdot f_a(x_E) = 2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \text{ (cm)}$$

Berechnung des Wendepunkts:

$$f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2x - 2a)e^{1-ax} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{2}{a}$$

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a} \cdot e^{1-a \cdot \frac{2}{a}} = \frac{2}{a \cdot e} \quad \Rightarrow \quad P_W\left(\frac{2}{a}; \frac{2}{a \cdot e}\right)$$

Berechnung von a:

$$d = 8 \quad \Rightarrow \quad f_a(11) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 11 \cdot e^{1-a \cdot 11} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-a \cdot 11} = \frac{4}{11}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - a \cdot 11 = \ln\left(\frac{4}{11}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1 - \ln\left(\frac{4}{11}\right)}{11} \approx 0,183$$

1.2

$$f_{\frac{1}{5}}(x) = x \cdot e^{1-\frac{x}{5}}$$

1.2.1

Ableitungen:

$$f_{\frac{1}{5}}'(x) = \left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{1-\frac{x}{5}}$$

$$f_{\frac{1}{5}}''(x) = \left(\frac{x}{25} - \frac{2}{5}\right)e^{1-\frac{x}{5}}$$

$$f_{\frac{1}{5}}'''(x) = \left(-\frac{x}{125} + \frac{3}{25}\right)e^{1-\frac{x}{5}}$$

Berechnung des Extrempunktes:

$$x_E = \frac{1}{a} = 5 \quad f_a''(x_E) = -a = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow x_E \text{ ist Maximumstelle} \quad f_a(x_E) = \frac{1}{a} = 5$$

Berechnung des Wendepunktes:

$$P_W\left(\frac{2}{a}; \frac{2}{a \cdot e}\right) \Rightarrow P_W\left(10; \frac{10}{e}\right) \quad f_{\frac{1}{5}}'''(10) = \left(-\frac{10}{125} + \frac{3}{25}\right)e^{1-\frac{10}{5}} = \frac{1}{25e} > 0 \Rightarrow \text{konkav} \rightarrow \text{konvex}$$

Graph der Funktion:



Berechnung der Stammfunktion:

$$\int f_{\frac{1}{5}}(x) dx = \int x \cdot e^{\frac{1-x}{5}} dx \quad \text{Partielle Integration: } u = x \quad u' = 1 \quad v = -5e^{\frac{1-x}{5}} \quad v' = e^{\frac{1-x}{5}}$$

$$\int x \cdot e^{\frac{1-x}{5}} dx = x \cdot \left(-5e^{\frac{1-x}{5}}\right) - \int 1 \cdot \left(-5e^{\frac{1-x}{5}}\right) dx = -5xe^{\frac{1-x}{5}} + 5 \int e^{\frac{1-x}{5}} dx = -5xe^{\frac{1-x}{5}} - 25e^{\frac{1-x}{5}} + c = -5(x+5)e^{\frac{1-x}{5}} + c \quad c \in \mathfrak{R}$$

Stammfunktion: $F(x) = -5(x+5)e^{\frac{1-x}{5}}$

Inhalt der Schnittfläche:

$$A = 2 \cdot \int_0^{11} f_{\frac{1}{5}}(x) dx = 2 \cdot \left[-5(x+5)e^{\frac{1-x}{5}}\right]_0^{11} = 2 \cdot \left(\frac{-80}{e^{\frac{10}{5}}} + 25e\right) = 10 \left(\frac{5e^3 - 16\sqrt[5]{e^4}}{e^2}\right) \approx 87,72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

1.2.2

$$N(h) = -0,73h^3 + 13h^2 + h \quad h \in \mathfrak{R}, 0 \leq h \leq 11$$

Berechnung der prozentualen Abweichung:

$$N(11) = 612,37 \text{ (ml)} \quad \frac{N(11) - V}{V} = \frac{612,37 - 591}{591} \approx 3,6\%$$

Berechnung von h:

$$N(h) = \frac{591}{2} = 295,5 \quad \Rightarrow \quad -0,73h^3 + 13h^2 + h = 295,5 \quad \Rightarrow \quad -0,73h^3 + 13h^2 + h - 295,5 = 0$$

Newtonsches Näherungsverfahren

$$K(h) = -0,73h^3 + 13h^2 + h - 295,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad K'(h) = -2,19h^2 + 26h + 1$$

$$h_{n+1} = h_n - \frac{K(h)}{K'(h)} \quad h_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 5 - \frac{-56,75}{76,25} \approx 5,744 \quad \Rightarrow \quad h_3 \approx 5,744 - \frac{0,8346}{78,0884} \approx 5,734$$

1.3

$$S(t) = S(0) \cdot e^{kt} \quad t \text{ in Minuten, } k \in \mathfrak{R} \quad \frac{S'(t)}{S(t)} = \ln 0,631$$

Berechnung von k:

$$S'(t) = S(0) \cdot ke^{kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{S(0) \cdot ke^{kt}}{S(0) \cdot e^{kt}} = k = \ln 0,631$$

$$\Rightarrow \quad S(t) = S(0) \cdot e^{t \cdot \ln 0,631} = S(0) \cdot (e^{\ln 0,631})^t = S(0) \cdot (0,631)^t$$

Berechnung der Zeit:

$$0,1 \cdot S(0) = S(0) \cdot (0,631)^t \quad \Rightarrow \quad \ln(0,1) = t \cdot \ln(0,631) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,631)} \approx 5,00073 \text{ (min)}$$

W2 Analytische Geometrie

$$\begin{matrix} A(4;0;0) & B(4;4;0) & C(0;4;0) & D(0;0;0) \\ E(3;1;6) & F(3;3;6) & G(1;3;6) & H(1;1;6) \end{matrix}$$

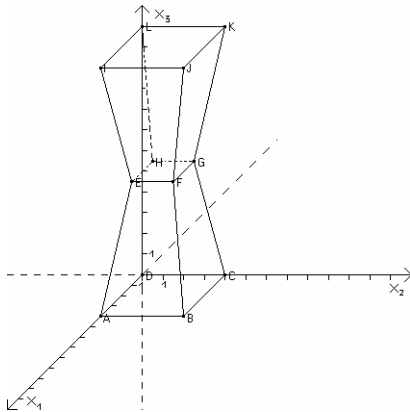
2.1

Koordinaten der fehlenden Eckpunkte:

Die z-Koordinaten betragen 12, weil das Modell 12 dm hoch ist. Die x- und y-Koordinaten stimmen mit den x- und y-Koordinaten von A, B, C, D überein, weil IJKL durch eine Spiegelung an der Ebene EFGH entsteht.

$$I(4;0;12) \quad J(4;4;12) \quad K(0;4;12) \quad L(0;0;12)$$

Darstellung des Modells:



Nachweis Pyramidenstumpf:

ABCD ist ein Quadrat:

z-Koordinaten alle gleich 0 \Rightarrow A, B, C, D liegen in einer Ebene

$$|\overline{AB}| = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} = 4 \quad |\overline{BC}| = \begin{vmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 4 \quad |\overline{CD}| = \begin{vmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{vmatrix} = 4 \quad |\overline{DA}| = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Alle Seiten sind gleich lang und } \overline{AB} \perp \overline{AD}.$$

EFGH ist ein Quadrat:

z-Koordinaten alle gleich 6 \Rightarrow E, F, G, H liegen in einer Ebene

$$|\overline{EF}| = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = 2 \quad |\overline{FG}| = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 2 \quad |\overline{GH}| = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} = 2 \quad |\overline{HE}| = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\overline{EF} \cdot \overline{EH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Alle Seiten sind gleich lang und } \overline{EF} \perp \overline{EH}.$$

Grundfläche und Deckfläche sind parallel:

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \overline{EF} \times \overline{EH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \times \overline{AD} = 4 \cdot (\overline{EF} \times \overline{EH})$$

Gerader Pyramidenstumpf \Rightarrow Seitenkanten gleich lang (Nachweis der Parallelität kann demnach entfallen):

$$|\overline{AE}| = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{vmatrix} = \sqrt{38} \quad |\overline{BF}| = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix} = \sqrt{38} \quad |\overline{CG}| = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix} = \sqrt{38} \quad |\overline{DH}| = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{vmatrix} = \sqrt{38}$$

Berechnung des Winkels:

$$\vec{n}_1 = \overline{AB} \times \overline{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \overline{BC} \times \overline{BF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{16}{4\sqrt{37} \cdot 4\sqrt{37}} = \frac{1}{37} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 88,45^\circ$$

2.2

Volumen des Quaders:

$$V_Q = 4 \cdot 4 \cdot 12 = 192 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Volumen des Modells:

$$A_G = |\overline{AB}|^2 = 4^2 \quad A_D = |\overline{EF}|^2 = 2^2 \quad h = z_E - z_A = 6 - 0 = 6$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} h (A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (4^2 + \sqrt{4^2 \cdot 2^2} + 2^2) = 2 \cdot 56 = 112 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Prozentualer Anteil des Abfalls am Volumen des Quaders:

$$\frac{V_Q - V}{V_Q} = \frac{192 - 112}{192} = \frac{80}{192} = \frac{5}{12} \approx 41,7\%$$

2.3

Berechnung des Winkels:

Die Bohrung wird vom Diagonalschnittpunkt S parallel zur Grundfläche so durchgeführt, dass die Bohrerspitze die Kante \overline{AE} durchstößt, da hier der in der Aufgabenstellung beschriebene Winkel maximal wird.

Da der quadratische Pyramidenstumpf gerade ist, liegt S symmetrisch bzgl. der Seitenkanten \overline{BF} und \overline{CG} . Die x-Koordinaten von S und vom Mittelpunkt M_{BC} der Strecke \overline{BC} stimmen also überein.

Die Bohrrichtung stimmt also mit $\overline{M_{BC}A}$ überein. Der maximale Winkel stimmt also mit dem Winkel $\sphericalangle BM_{BC}A$ überein.

$$M_{BC} \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}; \frac{z_B + z_C}{2} \right) = M_{BC} (2; 4; 0)$$

$$\cos \beta_{Max} = \frac{|\overline{M_{BC}A} \cdot \overline{M_{BC}B}|}{|\overline{M_{BC}A}| \cdot |\overline{M_{BC}B}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \beta_{Max} \approx 63,43^\circ$$

Alternativ kann man erst den Diagonalschnittpunkt S berechnen. Dann bestimmt man die Gleichungen für die Geraden g_{AE} und g_{BF} . Unter Ausnutzung, dass die Bohrung parallel zur Grundfläche erfolgt, also die z-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden von S ausgehenden Geraden mit den Kanten die z-Koordinate von S sein muss, errechnet man dann den Schnittpunkt P der Bohrerspitze mit der Kante \overline{AE} und den Schnittpunkt Q der Geraden durch S parallel zu \overline{BC} mit der Kante \overline{BF} . Zum Schluss berechnet man den Winkel zwischen \overline{SP} und \overline{SQ} .

$$\text{Zwischenergebnisse:} \quad S \left(2; \frac{10}{3}; 4 \right) \quad P \left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}; 4 \right) \quad Q \left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}; 4 \right)$$

W3 Analysis und Stochastik

$$v(x) = \frac{1}{1500}x^3 - x^2 + 500x \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$$

$$k(x) = v(x) + 100.000 \quad k(x) = \frac{1}{1500}x^3 - x^2 + 500x + 100.000 \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$$

3.1

Berechnung der Warenmenge:

Der Anstieg von k soll minimal werden, also ist die Minimumstelle der Funktion $k'(x)$ zu bestimmen. $k''(x)$ muss also Null gesetzt werden. Die 3. Ableitung von k wird zum Nachweis des Minimums benötigt.

$$k'(x) = \frac{1}{500}x^2 - 2x + 500 \quad k''(x) = \frac{1}{250}x - 2 \quad k'''(x) = \frac{1}{250} > 0$$

$$k''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{250}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 500 \text{ (ME)} \quad k'''(x_E) = \frac{1}{250} > 0 \Rightarrow \text{Minimumstelle}$$

3.2

$$u(x) = 500x \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$$

$$g(x) = u(x) - k(x) = 500x - \left(\frac{1}{1500}x^3 - x^2 + 500x + 100.000 \right) = -\frac{1}{1500}x^3 + x^2 - 100.000 \quad x \in \mathfrak{R}, x > 0$$

3.2.1

Berechnung des maximalen Gewinns:

$$g'(x) = -\frac{3}{1500}x^2 + 2x \quad g''(x) = -\frac{1}{250}x + 2$$

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{1500}x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \left(-\frac{3}{1500}x + 2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{E1} = 0 \text{ entfällt, da } x > 0 \quad \text{und} \quad -\frac{3}{1500}x + 2 = 0 \Rightarrow x_{E2} = 1000$$

$$g''(1000) = -\frac{1}{250}1000 + 2 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimumstelle}$$

$$g(1000) = -\frac{1}{1500}1000^3 + 1000^2 - 100.000 = 233.333,\bar{3} \approx 233.333 \text{ (EUR)}$$

3.2.2

Begründung:

$$g(363,26) = 1,16063 \text{ (EUR)}$$

$$g(1426,26) = 2,13662 \text{ (EUR)}$$

Bei den relativ großen Warenmengen, von über 350 ME bzw. über 1400 ME wird ein Gewinn von 1,16 € bzw. 2,14 € erwirtschaftet. Bezogen auf die großen Warenmengen sind die Gewinne vernachlässigbar klein.

Berechnung des mittleren Gewinns:

$$\bar{g} = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{1500}x^3 + x^2 - 100.000 \right) dx$$

$$\bar{g} = \frac{1}{(1426,26 - 363,26)^2} \int_{363,26}^{1426,26} \left(-\frac{1}{1500}x^3 + x^2 - 100.000 \right) dx$$

$$= \frac{1}{(1426,26 - 363,26)^2} \cdot \left[-\frac{1}{6000}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 100.000x \right]_{363,26}^{1426,26}$$

$$\approx \frac{1}{1063^2} \cdot (134.808.193 + 23.249.811)$$

$$\approx 139,88 \text{ (EUR)}$$

3.3

X...Anzahl der Personen, die die Waren kennen X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,75$

3.3.1

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

Drei Viertel von 500: $0,75 \cdot 500 = 375$

$$P(A) = P(X < 375) = P(X \leq 374) = F_{500;0,75}(374) = 0,4760 = 47,6\%$$

20% von 500: $0,2 \cdot 500 = 100$ Höchstens 100 kennen die Waren nicht \Rightarrow Mindestens 400 kennen die Waren

$$P(B) = P(X \geq 400) = 1 - P(X \leq 399) = 1 - F_{500;0,75}(399) = 1 - 0,9951 = 0,0049 = 0,49\%$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(380 \leq X \leq 400) = P(X \leq 400) - P(X \leq 379) = F_{500;0,75}(400) - F_{500;0,75}(379) \\ &= 0,9964 - 0,6765 = 0,3199 = 31,99\% \end{aligned}$$

3.3.2

Linksseitiger Signifikanztest:

Die Firma geht davon aus, dass der Bekanntheitsgrad bei 75% liegt. Falls dies nicht zutrifft, also weniger als 75% der Personen die Waren kennen, will sie eine Werbekampagne starten. Die Firma benötigt eine Entscheidungsregel zur Ablehnung der Nullhypothese, die zum Start der Werbekampagne führt.

$H_0: p = 0,75$ $H_1: p < 0,75$

H_0 wahr \Rightarrow X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,75$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; k_l\}$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

$$P(X \leq k_l) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad P(X \leq k_l) \leq 0,05 \quad \Rightarrow \quad F_{500;0,75}(k) \leq 0,05$$

$$F_{500;0,75}(358) = 0,0456 \quad F_{500;0,75}(359) = 0,0561 \quad \Rightarrow \quad k_l = 358$$

\Rightarrow Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; 358\}$

Wenn weniger als 359 Personen die Waren kennen, wird die Nullhypothese signifikant abgelehnt und die Werbekampagne wird gestartet.

\Rightarrow Annahmebereich: $A = \{359; 360; 361; \dots; 500\}$

Falls mindestens 359 Personen die Waren kennen, kann die Nullhypothese, dass der Bekanntheitsgrad bei 75% liegt, nicht signifikant abgelehnt werden. Aus „Mangel an Beweisen“ wird die Werbekampagne nicht gestartet.

Linksseitiger Signifikanztest:

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Werbekampagne gestartet wird, obwohl der Bekanntheitsgrad 77% beträgt. Es ist also die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist. Gesucht ist also die die Wahrscheinlichkeit α für den 1. Art.

$H_0: p = 0,77$ $H_1: p < 0,77$

H_0 wahr \Rightarrow X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,77$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; 358\}$

$$P(X \leq k_l) \leq \alpha$$

$$P(X \leq 358) \leq \alpha$$

$$F_{500;0,77}(358) \leq \alpha$$

$$0,0029 \leq \alpha$$

Das Risiko 1. Art beträgt 0,29%. Beträgt der Bekanntheitsgrad 77% und wird die Werbekampagne gestartet, wenn weniger als 359 Personen die Waren kennen, dann irrt sich die Firma mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,29%. Die Werbekampagne wird also fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,29% gestartet.