Quadratische Funktionen

Definition:
Eine Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R$; $a \neq 0$) heißt ***quadratische Funktion*** oder Funktion 2. Grades.
ax^2…quadratisches Glied; bx...lineares Glied; c...absolutes Glied
Der Graph einer quadratischen Funktion heißt ***Parabel***.
Parabeln haben eine Symmetrieachse. Der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Parabel heißt ***Scheitelpunkt***.

<u>Gleichungen quadratischer Funktionen:</u>

allgemein: $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R$; $a \neq 0$)

$a = 1 \Rightarrow y = x^2 + bx + c$
Hier hat es sich eingebürgert, nicht mehr b und c als typische Variablen zu nehmen, sondern p und q.
$\Rightarrow y = x^2 + px + q$ ($p, q \in R$)

$p = 0$ und $q = 0 \Rightarrow y = x^2$ einfachster Fall einer quadratischen Funktion
$p = 0$ und $q \neq 0 \Rightarrow y = x^2 + q$

Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 + q$

$y = x^2$

Wertetabelle: Zeichnung

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Der Graph der quadratischen Funktion $y = x^2$ heißt ***Normalparabel***.

Eigenschaften der Funktion $y = x^2$
maximaler Definitionsbereich[1]: $x \in R$ alle reellen Zahlen
Scheitelpunkt: S(0; 0) Ursprung des Koordinatensystems
Nullstelle[2]: $x_0 = 0$ genau eine Nullstelle
Monotonie[3]: für $x \leq 0$ monoton fallend
für $x \geq 0$ monoton steigend
Symmetrieachse: Ordinatenachse (y-Achse)
Wertebereich[1]: $y \in R, y \geq 0$ Menge der nichtnegativen reellen Zahlen

<u>**Zeichnen des Graphen**</u>
1. Scheitelpunkt
2. vom Scheitelpunkt aus: 1 nach rechts $\Rightarrow 1^2$ nach oben; 1 nach links $\Rightarrow 1^2$ nach oben
3. vom Scheitelpunkt aus: 2 nach rechts $\Rightarrow 2^2$ nach oben; 2 nach links $\Rightarrow 2^2$ nach oben
4. vom Scheitelpunkt aus: 3 nach rechts $\Rightarrow 3^2$ nach oben; 3 nach links $\Rightarrow 3^2$ nach oben
5. ...

---

[1] Eine Funktion ordnet jedem Element x der Definitionsmenge D_f genau ein Element y der Wertemenge W_f zu.
[2] Jede Zahl x aus dem Definitionsbereich einer Funktion $y = f(x)$, die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist, heißt ***Nullstelle*** der Funktion. (x-Wert der Schnittpunkte mit der x-Achse)
[3] Intervalle, in denen die Funktion monoton (gleichbleibend) steigt und fällt

Die Funktion $y = x^2 + q$

Zeichnen Sie die Funktionen $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ und $y = x^2 - 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.
(Definitionsbereich: $x \in R$; $-3 \leq x \leq 3$)
Stellen Sie eine Übersicht über die Eigenschaften der Funktion $y = x^2 + q$ zusammen.

Eigenschaften der Funktion $y = x^2 + q$

maximaler Definitionsbereich[4]:	$x \in R$	alle reellen Zahlen
Scheitelpunkt:	S(0; q)	Ursprung des Koordinatensystems
Monotonie[5]:	für $x \leq 0$ monoton fallend	
	für $x \geq 0$ monoton steigend	
Symmetrieachse:	Ordinatenachse (y-Achse)	
Wertebereich[1]:	$y \in R$, $y \geq q$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen

Lage des Scheitelpunktes S(0; q) bezüglich der x-Achse:
$q > 0 \Rightarrow$ S liegt oberhalb der Abszissenachse
$q = 0 \Rightarrow$ S liegt auf der Abszissenachse
$q < 0 \Rightarrow$ S liegt unterhalb der Abszissenachse

Nullstellen:
$q < 0 \Rightarrow$ genau 2 Nullstellen
$q = 0 \Rightarrow$ genau eine Nullstelle
$q > 0 \Rightarrow$ keine Nullstelle

Der Graph der Funktion $y = x^2 + q$ ist eine parallel zur Ordinatenachse verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S(0; q).

Zeichen des Graphen $y = x^2 + q$: wie bei der Normalparabel vorgehen

<u>Berechnung der Nullstellen</u>

$y = x^2 - 2$ y muss 0 sein $\Rightarrow 0 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow$ zwei Nullstellen
$y = x^2 + 2$ y muss 0 sein $\Rightarrow 0 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow$ n.l. $\Rightarrow$ keine Nullstellen

allg.: $y = x^2 + q$
y muss 0 sein $\Rightarrow 0 = x^2 + q \Rightarrow x^2 = -q$

$\Rightarrow$ n.l.	$\Leftrightarrow q > 0$	$\Rightarrow$ keine Nullstellen
$\Rightarrow x_0 = 0$	$\Leftrightarrow q = 0$	$\Rightarrow$ ein Nullstelle
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{-q}$; $x_2 = -\sqrt{-q}$		$\Rightarrow$ zwei Nullstellen

<u>Bestimmen von q</u>

$y = x^2 + q$ P(2 ; 1) $\Rightarrow 1 = 2^2 + q \Rightarrow q = -3 \Rightarrow y = x^2 - 3$

---

4 Eine Funktion ordnet jedem Element x der Definitionsmenge D_f genau ein Element y der Wertemenge W_f zu.
5 Intervalle, in denen die Funktion monoton (gleichbleibend) steigt und fällt

Die Funktion $y = x^2 + px + q$

Stellen Sie folgende Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle graphisch dar.

- $y = x^2 + 6x + 9$ im Intervall $-5 \leq x \leq -1$
- $y = x^2 + 6x + 11$ im Intervall $-5 \leq x \leq -1$
- $y = x^2 - 2{,}6x - 1{,}9$ im Intervall $-2 \leq x \leq 4$

Vergleichen Sie die Graphen mit dem Graphen der Funktion $y = x^2$.

- Es liegt in allen Fällen eine Verschiebung des Graphen der Funktion $y = x^2$ vor.
- Es handelt sich dabei aber für $p \neq 0$ nicht um eine Verschiebung nur in Richtung der Ordinatenachse.

Genauere Untersuchungen:
Umformen der Funktion mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

geg.: $y = x^2 + px + q$ ges. : $y = (x + d)^2 + e$

umgekehrter Weg:
geg.: $y = (x + 4)^2 + 2 \Rightarrow y = x^2 + 8x + 16 + 2 \Rightarrow y = x^2 + 8x + 18$

binomische Formel : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ hier: $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$

geg.: $y = x^2 + 8x + 18 \Rightarrow y = x^2 + 8x + (8/2)^2 - (8/2)^2 + 18$

$\Rightarrow y = (x + 4)^2 - (8/2)^2 + 18$

$\Rightarrow y = (x + 4)^2 + 2$

<u>Übung :</u>

a)	$y = x^2 + 10x + 25$	$y = (x + 5)^2$
b)	$y = x^2 - 8x + 16$	$y = (x - 4)^2$
c)	$y = x^2 + 4x + 3$	$y = (x + 2)^2 - 1$
d)	$y = x^2 + 10x + 27$	$y = (x + 5)^2 + 2$
e)	$y = x^2 - 5x - 1$	$y = (x + 5/2)^2 - 7{,}25$
f)	$y = x^2 - 3x - 7/4$	$y = (x + 1{,}5)^2 - 4$

Funktionen a, b, c und d, e, f in jeweils ein Koordinatensystem zeichnen und Scheitelpunkt ablesen !

S(- d; e)
Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion: $y = (x + d)^2 + e$

Verschiebung:
Der Graph der Funktion $y = (x + d)^2 + e$ ist gegenüber $y = x^2$ um $-d$ in Richtung der Abszissenachse verschoben.
Der Graph der Funktion $y = (x + d)^2 + e$ ist gegenüber $y = x^2$ um e in Richtung der Ordinatenachse verschoben.

Für Funktionen $y = (x + d)^2 + e$ ($d, e \in R$) gilt:
Der Graph jeder dieser Funktionen ist eine Normalparabel. Der Scheitelpunkt der Parabel ist S(-d; e). Die Achse der Parabel verläuft parallel zur Ordinatenachse.

S(-d; e) ist Scheitelpunkt, da $y = (x + d)^2$ für $x = -d$ den kleinsten Wert annimmt.

Die Funktion $y = ax^2$ mit $a \in R$; $a \neq 0$

Stellen Sie folgende Funktionen im angegebenen Intervall mit Hilfe einer Wertetabelle graphisch dar. Vergleichen Sie die Graphen mit dem Graphen der Funktion $y = x^2$.

- $y = x^2$ Intervall: [-3; 3] Streckungsfaktor: 1
- $y = -x^2$ Intervall: [-3; 3] Streckungsfaktor: -1
- $y = 2x^2$ Intervall: [-2; 2] Streckungsfaktor: 2
- $y = -2x^2$ Intervall: [-2; 2] Streckungsfaktor: 2
- $y = \frac{1}{2}x^2$ Intervall: [-4; 4] Streckungsfaktor: 2
- $y = -\frac{1}{2}x^2$ Intervall: [-4; 4] Streckungsfaktor: 2

Man erhält den Funktionswert von $y = ax^2$, indem man den Funktionswert von $y = x^2$ mit a multipliziert.

Ergebnisse

- Der Graph der Funktion $y = ax^2$ heißt ***Parabel***. (Im Gegensatz zur Normalparabel.)

- ***D(f)***: $x \in R$; ***W(f)***: $y \in R$, $y \geq 0$
- ***Monotonie***: für $x<0$ m$\downarrow$; für $x>0$ m$\uparrow$
- ***Scheitelpunkt:*** S(0; 0)
- Die einzige ***Nullstelle*** ist $x_0 = 0$.
- ***Symmetrieachse***: $x_s = 0$.

- Für $a > 0$ ist die Parabel nach ***oben*** geöffnet
- Für $a < 0$ ist die Parabel ***unten*** offen. (Spiegelung der Normalparabel an der Abszissenachse.)
- Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger als die Normalparabel.
  (***Streckung*** der Normalparabel in Richtung der Ordinatenachse)
- Für $|a| < 1$ ist die Parabel weiter als die Normalparabel.
  (***Stauchung*** der Normalparabel in Richtung der Ordinatenachse)

- $a = 1 \Rightarrow$ Normalparabel $y = x^2$
- $a = -1 \Rightarrow$ Spiegelung der Normalparabel an der Abszissenachse

Die Funktion $y = ax^2 + c$ mit $a,c \in R$; $a \neq 0$

Stellen Sie folgende Funktionen im angegebenen Intervall mit Hilfe einer Wertetabelle graphisch dar. Vergleichen Sie die Graphen mit dem Graphen der Funktion $y = ax^2$.

- $y = 2x^2 - 2$ Intervall: [-2; 2]
- $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$ Intervall: [-2; 2]
- $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ Intervall: [-4; 4]
- $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ Intervall: [-3; 3]

Ergebnisse

- Der Graph der Funktion $y = ax^2 + c$ ist eine Parabel, die gegenüber der Parabel der Funktion $y = ax^2$ um c in Richtung der Ordinatenachse verschoben wurde.

- ***D(f)***: $x \in R$; ***W(f)***: $y \in R$, $y \geq c$
- ***Monotonie:*** für $x<0$ m↓ ; für $x>0$ m↑
- ***Scheitelpunkt:*** S(0; c).
- ***Symmetrieachse:*** $x_s = 0$.

- ***Nullstellen***

$$0 = ax^2 + c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  - Ist c = 0, so hat die Funktion $y = ax^2 + c$ eine Nullstelle: $x_0 = 0$
  - Haben das quadratische Glied a und das absolute Glied c das gleiche Vorzeichen, so hat die Funktion $y = ax^2 + c$ keine Nullstellen.
  - Haben das quadratische Glied a und das absolute Glied c unterschiedliche Vorzeichen, so hat die Funktion $y = ax^2 + c$ zwei Nullstellen.

- Scheitelpunktsform und Normalform: $y = ax^2 + c$ a...Streckungsfaktor; c...Verschiebung

Die Funktion y = ax² + bx + c mit a,b,c∈R; a ≠ 0

Stellen Sie folgende Funktion im angegebenen Intervall mit Hilfe einer Wertetabelle graphisch dar.
$y = 2x^2 - 12x + 16$ Intervall: [1; 5] Scheitelpunkt: S(3; -1)

Scheitelpunktform

$$y = 2x^2 - 12x + 16 \quad \Rightarrow \quad y = 2\left[x^2 - 6x + 8\right] \quad \Rightarrow \quad y = 2\left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 8\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\left[(x-3)^2 - 9 + 8\right] \quad \Rightarrow \quad y = 2\left[(x-3)^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2(x-3)^2 - 2$$

- ***Scheitelpunkt:*** S(3; -2)
- ***Streckungsfaktor:*** 2

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

- ***Scheitelpunkt:*** $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$
- ***Streckungsfaktor:*** a

Nullstellen

$$0 = 2x^2 - 12x + 16 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2(x-3)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad 2(x-3)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = \pm\sqrt{1}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = 3 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4;\ x_2 = 2$$

$$0 = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad 0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- $b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow$ 2 Nullstellen
- $b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow$ keine Nullstellen
- $b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow$ eine Nullstelle: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Ergebnisse

- Der Graph der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel, mit dem Scheitelpunkt $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ und dem Streckungsfaktor a.

- ***D(f)***: $x \in R$; ***W(f)***: $y \in R$, $y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$
- ***Monotonie:*** für $x < -\frac{b}{2a}$ m↓ ; für $x > -\frac{b}{2a}$ m↑
- ***Symmetrieachse:*** $x_S = -\frac{b}{2a}$

- a > 0 ⇒ Parabel nach ***oben*** geöffnet, a < 0 ⇒ Parabel ***unten*** offen
- |a| > 1 ⇒ ***Streckung*** um a in Richtung der Ordinatenachse
- |a| < 1 ⇒ ***Stauchung*** um a in Richtung der Ordinatenachse

- ***Nullstellen:*** $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

- ***Scheitelpunktform:*** $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ a..Streckungsfaktor; $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$