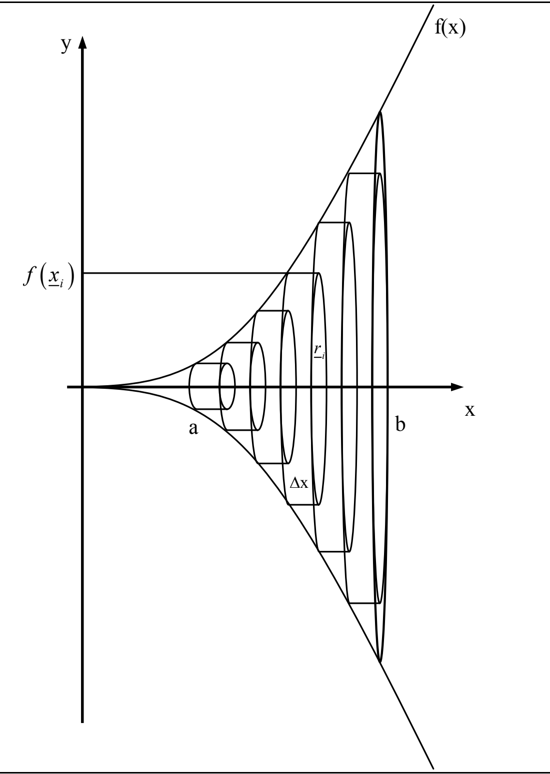
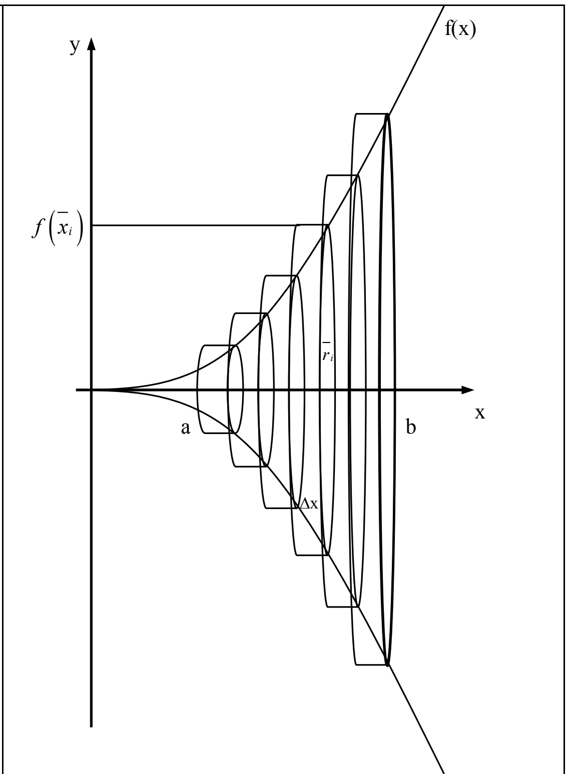
Berechung des Volumens von Rotationskörpern

Wenn der Graph einer stetigen Funktion f um die Abszissenachse rotiert, erzeugt er die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Die rotierende Fläche unter dem Graphen von f erzeugt das Volumen des Rotationskörpers. Analog zur Streifenmethode kann man das Intervall [a; b] in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zerlegen. Der Rotationskörper wird in n Kreiszylinder der Höhe Δx zerlegt. Man kann die Zylinder mit den jeweils kleinsten und größten Radien betrachten:

<table>
<tr><td>Skizzen:</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Radius des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{r}_i = f\left(\underline{x}_i\right)$</td><td>$\overline{r}_i = f\left(\overline{x}_i\right)$</td></tr>
<tr><td>Grundfläche des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{A}_i = \pi \cdot \underline{r}_i^2 = \pi \cdot \left[f\left(\underline{x}_i\right) \right]^2$</td><td>$\overline{A}_i = \pi \cdot \overline{r}_i^2 = \pi \cdot \left[f\left(\overline{x}_i\right) \right]^2$</td></tr>
<tr><td>Volumen des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{V}_i = \pi \cdot \underline{r}_i^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \left[f\left(\underline{x}_i\right) \right]^2 \cdot \Delta x$</td><td>$\overline{V}_i = \pi \cdot \overline{r}_i^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \left[f\left(\overline{x}_i\right) \right]^2 \cdot \Delta x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Das wahre Volumen des Rotationskörpers liegt zwischen der Summe aller Volumina der Kreiszylinder mit den kleinsten Radien (Untersumme) und der Summe aller Volumina der Kreiszylinder mit den größten Radien (Obersumme): $s_n \le V \le S_n$</td></tr>
<tr><td>Unter- bzw. Obersumme:</td><td>$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\pi \cdot \left[f\left(\underline{x}_i\right) \right]^2 \cdot \Delta x \right)$</td><td>$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\pi \cdot \left[f\left(\overline{x}_i\right) \right]^2 \cdot \Delta x \right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mit wachsendem n wird die Höhe Δx der Kreiszylinder immer kleiner und die Untersumme nähert sich von unten, die Obersumme von oben dem wahren Volumen des Rotationskörpers an. Die Folgen $\left(s_n\right)$ und $\left(S_n\right)$ sind monoton und beschränkt und besitzen somit jeweils einen Grenzwert. Da die Funktion f stetig ist, ist auch die Funktion $\pi \cdot \left[f(x) \right]^2$ stetig und deshalb stimmen die Grenzwerte der Unter- und Obersumme überein.
Nach der Definition des bestimmten Integrals ist dieser gemeinsame Grenzwert das bestimmte Integral der Funktion $\pi \cdot \left[f(x) \right]^2$ im Intervall [a; b]: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \pi \cdot \left[f(x) \right]^2 \, dx$.</td></tr>
</table>

Ist f in [a; b] stetig, so entsteht bei der Rotation der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszissenachse über [a; b] ein Rotationskörper mit dem Volumen $V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 \, dx$