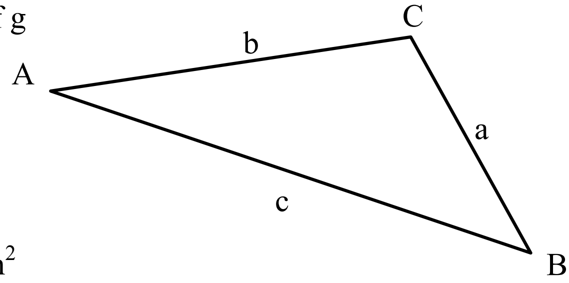
Wiederholung: Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks

1. Zeichnen Sie alle Höhen des Dreiecks ΔABC ein.
2. Geben Sie eine Gleichung für den Flächeninhalt eines Dreiecks an, die keine Winkel enthält.
3. Geben Sie alle drei möglichen Gleichungen zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC an.
4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

Gleichung: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$ g...Grundseite, h...Höhe auf g



Gleichungen: $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

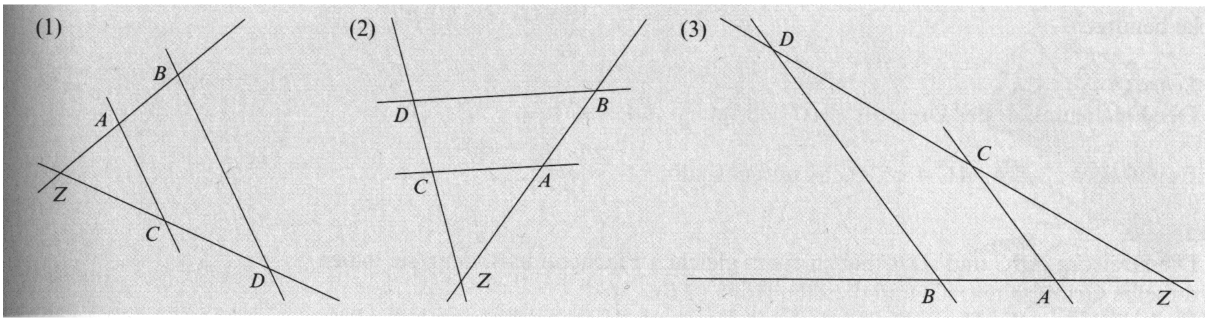
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC:

Messung: $a = 3{,}3\text{cm}, h_a = 4{,}5\text{cm} \Rightarrow A = 7{,}425\text{cm}^2$

$b = 4{,}8\text{cm}, h_b = 3{,}1\text{cm} \Rightarrow A = 7{,}44\text{ cm}^2$

$c = 6{,}7\text{cm}, h_c = 2{,}2\text{cm} \Rightarrow A = 7{,}37\text{ cm}^2 \Rightarrow$ **$A \approx 7{,}4\text{ cm}^2$**

Zwei Strahlen, die von einem Punkt Z ausgehen, werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten. Untersuchen Sie die Streckenverhältnisse auf den Strahlen.



1. **Messen Sie die einzelnen Streckenlängen und füllen Sie die Tabelle aus.** (Zeile 4 siehe Aufgabe 3)

	$\overline{ZA}$	$\overline{ZB}$	$\overline{ZC}$	$\overline{ZD}$	$\overline{ZA}:\overline{ZB}$	$\overline{ZC}:\overline{ZD}$
1.)	**1,0 cm**	**2,0 cm**	**1,5 cm**	**3,0 cm**	**0,5**	**0,5**
2.)	**1,8 cm**	**3,0 cm**	**1,5 cm**	**2,5 cm**	**0,6**	**0,6**
3.)	**1,5 cm**	**3,0 cm**	**3,0 cm**	**6,0 cm**	**0,5**	**0,5**
4.)						

2. **Formulieren Sie die Ergebnisse in einem Satz.** (Was ist die Voraussetzung? Was ist die Behauptung?)

Voraussetzung: $g(A,C) \parallel g(B,D)$

Behauptung: $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}}$

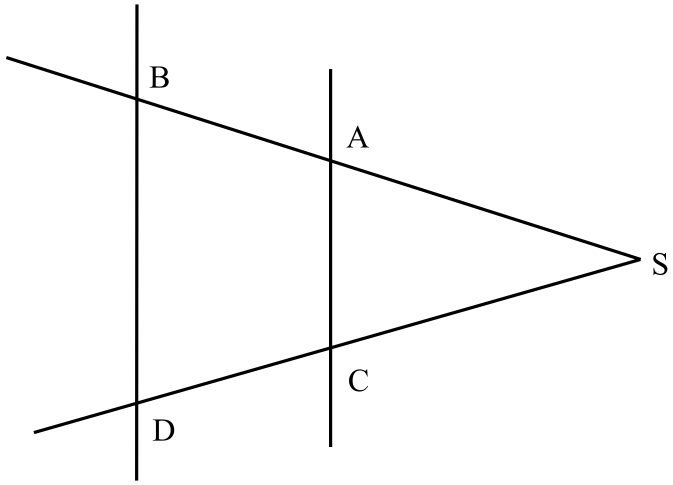
Satz: **Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechende Abschnitte auf dem anderen.**

3. **Zeichnen Sie zwei Strahlen und zwei zueinander parallele Geraden, die die beiden Strahlen schneiden. Überprüfen Sie in dieser Figur, ob der Satz auch hier gilt.** (Tabelle Zeile 4)

Der 1. Strahlensatz

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechende Abschnitte auf dem anderen.

Kurzform: $g(A,C) \parallel g(B,D) \Rightarrow \dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$



Voraussetzung: $g(A,C) \parallel g(B,D)$

Behauptung: $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$

Beweis:

$$A_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}\overline{SA}\cdot h_1 = \frac{1}{2}\overline{SC}\cdot h_2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{SA}\cdot h_1 = \overline{SC}\cdot h_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Die Dreiecke ΔCAB und ΔCAD haben den gleichen Flächeninhalt: $A_{\Delta CAB} = A_{\Delta CAD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_3$ **(2)**

Begründung: Nach Voraussetzung gilt $g(A,C) \parallel g(B,D)$. Deshalb haben die Dreiecke ΔCAB und ΔCAD die gleiche Höhe h_3.

Außerdem haben die Dreiecke dieselbe Grundseite $\overline{AC}$.

Die Dreiecke ΔSBC und ΔSAD haben den gleichen Flächeninhalt: $A_{\Delta SBC} = A_{\Delta SAD}$ **(3)**

Begründung: $A_{\Delta SBC} = A_{\Delta SAC} + A_{\Delta CAB} = A_{\Delta SAC} + A_{\Delta CAD} = A_{\Delta SAD}$

Wegen **(3)** gilt also: $\frac{1}{2}\overline{SB}\cdot h_1 = \frac{1}{2}\overline{SD}\cdot h_2 \Rightarrow \overline{SB}\cdot h_1 = \overline{SD}\cdot h_2$ **(4)**

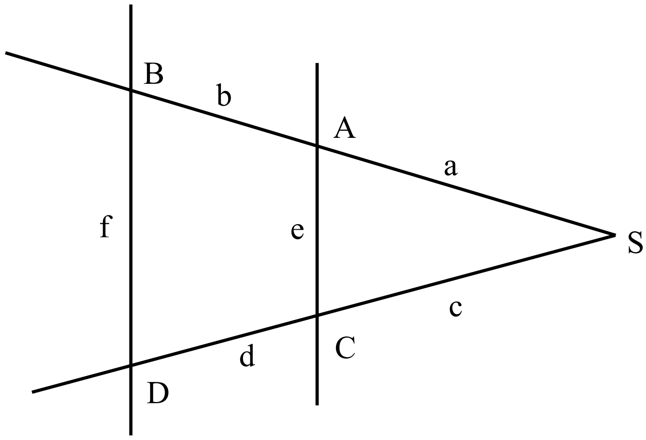
Aus **(1)** und **(4)** folgt:

$$\frac{\overline{SA}\cdot h_1}{\overline{SB}\cdot h_1} = \frac{\overline{SC}\cdot h_2}{\overline{SD}\cdot h_2} \Rightarrow \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

w.z.b.w.

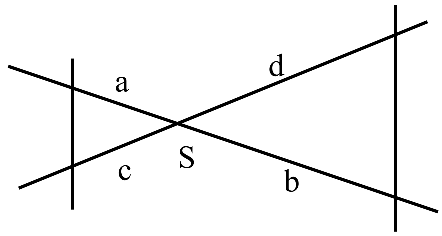
Der 1. Strahlensatz: weitere Gleichungen

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechende Abschnitte auf dem anderen.



$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \text{ und } \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} \text{ und } \frac{\overline{SB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \text{ und } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ und } \frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$



$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \Rightarrow \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$$

<u>**Beweis:**</u>

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}+\overline{AB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}+\overline{CD}} \qquad \text{mit } \overline{SB}=\overline{SA}+\overline{AB} \text{ und } \overline{SD}=\overline{SC}+\overline{CD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{SA}+\overline{AB}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{SC}+\overline{CD}}{\overline{SC}} \qquad \text{Kehrwert bilden}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \qquad \text{Bruch auflösen}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}=1+\frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \Rightarrow \frac{\overline{SB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$$

<u>**Beweis:**</u>

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SB}-\overline{AB}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SD}-\overline{CD}}{\overline{SD}} \qquad \text{mit } \overline{SA}=\overline{SB}+\overline{AB} \text{ und } \overline{SC}=\overline{SD}+\overline{CD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{SB}}{\overline{SB}}-\frac{\overline{AB}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{SD}}-\frac{\overline{CD}}{\overline{SD}} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{\overline{AB}}{\overline{SB}}=1-\frac{\overline{CD}}{\overline{SD}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{SD}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$$