Beweis der Summenformel $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$ **mittels Vollständiger Induktion**

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

<u>Induktionsanfang:</u>

m = 1

$1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$

$1=1$

<u>Induktionsschritt:</u>

Induktionsvoraussetzung: $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

Induktionsbehauptung: $1+2+3+...+m+(m+1)=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$

Induktionsbeweis:

$$1+2+3+...+m+(m+1)$$

$$=\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)$$

$$=(m+1)\cdot\left[\frac{1}{2}m+1\right]$$

$$=\frac{1}{2}(m+1)\cdot(m+2)$$

q.e.d

Beweis der Summenformel $1^2+2^2+3^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ **mittels Vollständiger Induktion**

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1^2+2^2+3^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Induktionsanfang:

m = 1

$$1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2+1)$$

$$1=1$$

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $1^2+2^2+3^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Induktionsbehauptung: $1^2+2^2+3^2+...+m^2+(m+1)^2=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$

Induktionsbeweis:

$$1^2+2^2+3^2+...+m^2+(m+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+(m+1)^2$$

$$=(m+1)\cdot\left[\frac{1}{6}m(2m+1)+(m+1)\right]$$

$$=(m+1)\cdot\left[\frac{2}{6}m^2+\frac{1}{6}m+m+1\right]$$

$$=(m+1)\cdot\left[\frac{1}{6}(2m^2+m+6m+6)\right]$$

$$(m+1)\cdot\left[\frac{1}{6}(2m^2+7m+6)\right]$$

$$=(m+1)\cdot\left[\frac{1}{6}(m+2)(2m+3)\right]$$

$$=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

q.e.d

Beweis der Summenformel $1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$ **mittels Vollständiger Induktion**

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

Induktionsanfang:

m = 1

$$1^3=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2$$
$$1=1$$

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: $1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

Induktionsbehauptung: $1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=\frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3\\
&=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2+(m+1)^3\\
&=(m+1)^2\cdot\left[\frac{1}{4}m^2+(m+1)\right]\\
&=(m+1)^2\cdot\left[\frac{1}{4}m^2+m+1\right]\\
&=(m+1)^2\cdot\left[\frac{1}{4}(m^2+4m+4)\right]\\
&=(m+1)^2\cdot\left[\frac{1}{4}(m+2)^2\right]\\
&=\frac{1}{4}(m+1)^2\cdot(m+2)^2
\end{aligned}$$

q.e.d