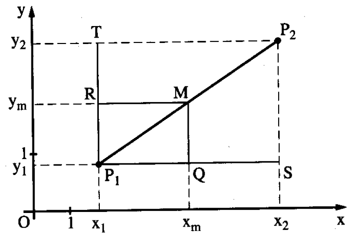
Teilungspunkte von Strecken

Mittelpunkt einer Strecke



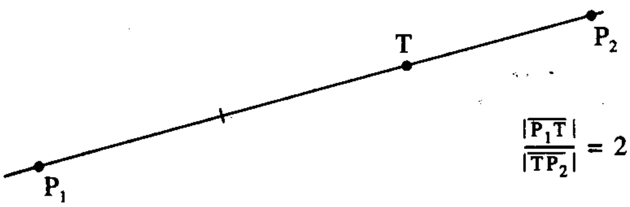
geg.: $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$
ges.: Koordinaten x_M und y_M des Mittelpunktes M von $\overline{P_1P_2}$

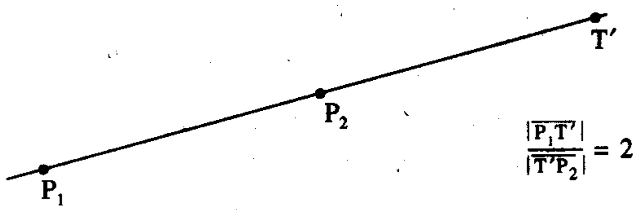
1. senkrechte Projektionen der Punkte P_1, M, P_2 auf die x- und y-Achse
2. $\Rightarrow \overline{MQ} \parallel \overline{P_2S}$
3. M ist Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$ $\Rightarrow$ Strahlensatz $\Rightarrow \dfrac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{P_1Q}}{\overline{P_1S}}$ $\Rightarrow$ Q ist Mittelpunkt von $\overline{P_1S}$
4. $\overline{P_1S} \parallel$x-Achse $\Rightarrow Q(x_M; y_1)$
5. $x_M = x_1 + \left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right) = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$
6. $R(x_1; y_M)$ analog
7. $\Rightarrow M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ in der Ebene mit $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ ist $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Teilungspunkt einer Strecke

Beispiel: **<u>Dreiteilung</u>** einer Strecke $\overline{P_1P_2}$





innere Teilung
T... innerer Teilungspunkt

äußere Teilung
T'...äußerer Teilungspunkt

Teilungsverhältnis in beiden Fällen 2
$\Rightarrow$ Verhältniszahl nicht ausreichend, um äußere und innere Teilung zu unterscheiden

$\Rightarrow$ Einführung des Begriffs **gerichtete Strecke** $\overrightarrow{AB}$ (von A nach B)

$m\left(\overrightarrow{AB}\right)$...Maßzahl der gerichteten Strecke

- gerichtete Gerade g durch P_1 und P_2 (durch $\overrightarrow{P_1P_2}$ Richtung festgelegt)
  - $m\left(\overrightarrow{AB}\right) = \left|\overline{AB}\right|$, falls $\overrightarrow{AB}$ und g gleiche Orientierung haben
  - $m\left(\overrightarrow{AB}\right) = -\left|\overline{AB}\right|$, falls $\overrightarrow{AB}$ und g entgegengesetzt orientiert sind

  (Vorzeichen legt Richtung fest)

- A, B zwei verschiedene Pkt. auf g $\Rightarrow$ unabhängig von der Orientierung von g gilt:
  $m\left(\overrightarrow{AB}\right) = -m\left(\overrightarrow{BA}\right)$

Beispiel: **<u>Dreiteilung</u>** einer Strecke $\overline{P_1P_2} \Rightarrow \frac{m(\overrightarrow{P_1T})}{m(\overrightarrow{TP_2})} = 2$ und $\frac{m(\overrightarrow{P_1T'})}{m(\overrightarrow{T'P_2})} = -2$
(unabhängig von der Orientierung der Geraden g)

Definition: Teilverhältnis

$\overrightarrow{P_1P_2}$ sei gerichtete Strecke; Punkt T liege auf der Geraden durch P_1 und P_2, T verschieden von P_2

Der Quotient $\lambda = \frac{m(\overrightarrow{P_1T})}{m(\overrightarrow{TP_2})}$ heißt das Teilverhältnis des Punktes T bezüglich $\overrightarrow{P_1P_2}$.

T teilt die Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ im Verhältnis λ.

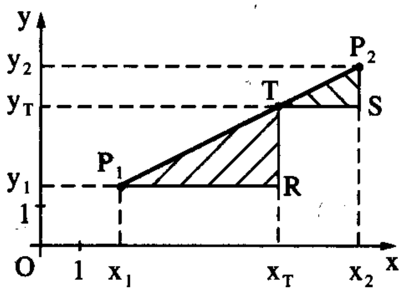
Berechnung von λ

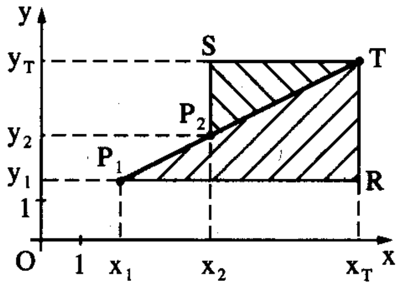
- Konstruktion der Punkte R und S durch Geraden parallel zur x- und y-Achse
- Ähnlichkeitssatz für Dreiecke (stimmen in zwei Winkeln überein)
  $\Rightarrow \Delta P_1RT \sim \Delta TSP_2$
  Richtungspfeile über die Strecken zeichnen

$$\lambda = \frac{m(\overrightarrow{P_1T})}{m(\overrightarrow{TP_2})} = \frac{m(\overrightarrow{P_1R})}{m(\overrightarrow{TS})} = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T}$$

und

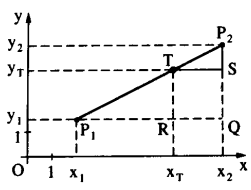
$$\lambda = \frac{m(\overrightarrow{P_1T})}{m(\overrightarrow{TP_2})} = \frac{m(\overrightarrow{RT})}{m(\overrightarrow{SP_2})} = \frac{y_T - y_1}{y_2 - y_T}.$$





⇒ Teilungspunkt einer gerichteten Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ **:** $T\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)$

alternativ mit Strahlensatz:



Nach dem 1. Strahlensatz mit P_1 als Zentrum gilt:

$$\lambda = \frac{|\overline{P_1T}|}{|\overline{TP_2}|} = \frac{|\overline{P_1R}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T}$$

Daraus folgt: $\lambda(x_2 - x_T) = x_T - x_1$

$\lambda x_2 - \lambda x_T = x_T - x_1$

$x_T(1 + \lambda) = \lambda x_2 + x_1 \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

Analog erhält man nach dem 1. Strahlensatz mit P_2 als Zentrum

$$\lambda = \frac{|\overline{TP_1}|}{|\overline{P_2T}|} = \frac{|\overline{SQ}|}{|\overline{P_2S}|} = \frac{y_T - y_1}{y_2 - y_T}$$ Daraus folgt analog: $y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

λ-Werte für Teilungspunkte von $\overrightarrow{P_1P_2}$

- $\lambda = 0 \Leftrightarrow T(x_1; y_1)$ — T = P_1
- $\lambda = 1 \Leftrightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ — T = M
- $\lambda > 0 \Leftrightarrow$ innere Teilung — T zwischen P_1 und P_2
- $\lambda < 0 \Leftrightarrow$ äußere Teilung — T außerhalb von $\overrightarrow{P_1P_2}$
- $\lambda \neq -1$, da $m(\overrightarrow{P_1P_2}) = m(\overrightarrow{P_1T}) + m(\overrightarrow{TP_2}) \Rightarrow m(\overrightarrow{P_1T}) \neq -m(\overrightarrow{TP_2})$