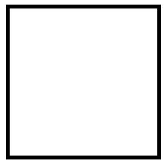
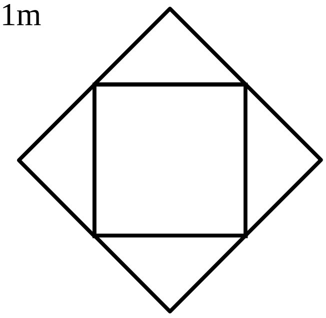
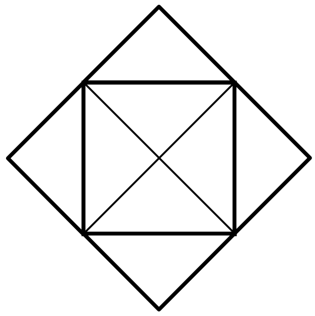
Die Fläche eines quadratischen Sandspielplatzes soll so verdoppelt werden, dass wieder ein Quadrat entsteht. An den Ecken stehen jedoch Bäume, die nicht entfernt werden sollen.
Wie kann man das Quadrat verdoppeln?



1m

1m





Wie lang ist die Seite des neuen Quadrats?

- so lang wie die Diagonale des Ursprungsquadrats
- Zeichnung im Maßstab 1m ⇔ 4cm (25 : 1)
  - Messung
    - 5,6cm ⇒ 1,4m ⇒ A = 1,96m^2
    - 5,65cm ⇒ 1,4125m ⇒ A = 1,99515625m^2
    - 5,7cm ⇒ 1,425m ⇒ A = 2,030625m^2
- Berechnung:
  - $a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ Satz des Pythagoras
  - A = 2 ⇒ a = $\sqrt{2}$ Flächeninhalt des Quadrates

- Was verbirgt sich hinter $\sqrt{2}$?
- Wie sieht die Zahl aus?
- Wie kann man sie hinschreiben?
- Kann man sie hinschreiben?

- **Kann man $\sqrt{2}$ mit Hilfe einer rationalen Zahl (mit einem endlichen Dezimalbruch) schreiben?**

Gesucht ist eine rationale Zahl a, so dass $a^2 = 2$, also a = $\sqrt{2}$ ist.

a	a^2	$a^2 = 2$?	Vergleich von a mit $\sqrt{2}$
1	1	nein	$1 < \sqrt{2}$
2	4	nein	$2 > \sqrt{2}$
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$	nein	$\frac{3}{2} > \sqrt{2}$
$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{25}{16} = 1{,}5625$	nein	$\frac{5}{4} < \sqrt{2}$
$\frac{11}{8} = 1{,}375$	$\frac{121}{64} = 1{,}890625$	nein	$\frac{11}{8} < \sqrt{2}$
...			

Wie lange noch rumprobieren?
Vielleicht ist die rationale Zahl a so beschaffen, dass Zähler und Nenner 100000 Stellen haben?
⇒ kilometerlange Tafeln, Stunden von Zeit

Was rechnet der Taschenrechner aus?

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237$ (11 Stellen nach dem Komma)

Eingeben: $1{,}41421356237^2 = 1{,}99999999999 < 2$ auch nur gerundet, stimmt nicht exakt.

Antwort:

- $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
- Es gibt keine rationale Zahl a, deren Quadrat $a^2 = 2$ ist.
- Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge 1 lässt sich nicht mit einer rationalen Zahl angeben.

Beweis?
Wir müssten alle rationalen Zahlen zwischen 1 und 2 durchprobieren. $\Rightarrow$ geht nicht.

Wir führen den Beweis aus mehreren Gründen:

1. um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ ***keine rationale Zahl*** ist,
2. um zu zeigen, dass das ***System der rationalen Zahlen*** nicht perfekt ist,
3. um ein Beispiel für einen ***Unmöglichkeitsbeweis*** zu geben
   (Es ist unmöglich, unter den vielen rationalen Zahlen eine zu finden, deren Quadrat = 2 ist.)
4. um eine wichtige Beweismethode zu verdeutlichen: ***indirekter Beweis***

indirekter Beweis:

- Wir nehmen das Gegenteil von dem an, was wir zeigen wollen und führen dies zu einem Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass das Gegenteil nicht stimmen kann.

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational (nicht rational)

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p, q $\in$ N und q $\geq$ 2
(echter Bruch)

Beweis: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$ (Quadrieren, Potenzgesetz Div. mit gl. Exp.)

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$ **Primfaktorzerlegung von p und q**

$\Rightarrow (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n)^2 = 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)^2$

$\Rightarrow p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2 = 2 \cdot q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \ldots \cdot q_m^2$

Alle Primfaktoren von p kommen in p^2 doppelt vor.

$\Rightarrow p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_n = 2 \cdot q_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m \cdot q_m$

n + n = 2n Primfaktoren — 1 + 2m Primfaktoren
gerade Anzahl — ungerade Anzahl

Primfaktordarstellung von p:
$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$
p = Produkt von n Primzahlen

Bsp.: p = 312
$$\begin{aligned} 312 &= 2 \cdot 156 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 78 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 39 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \end{aligned}$$

Primfaktordarstellung von q:
$q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$
Produkt von m Primzahlen

Das kann niemals das gleiche ergeben, da die Primfaktoren einer Zahl eindeutig festgelegt sind. (Zu jeder Zahl gehören ganz bestimmte Primfaktoren.)

$\Rightarrow p^2 \neq 2q^2$ Widerspruch

$\Rightarrow$ Annahme kann nicht stimmen
$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Der Beweis funktioniert genau für alle Radikanten mit einer ungeraden Primfaktorenanzahl.
($\Rightarrow$ also auch für alle Primzahlen)
$\Rightarrow$ für den Beweis, dass $\sqrt{6}$ irrational ist funktioniert er nicht, da.
aber: $6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ = irrationale · irrationale

Man kann $\sqrt{2}$ nicht als endlichen Dezimalbruch schreiben.

- Taschenrechner: $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$ (11 Stellen)
- **Gedicht von Aigner:** $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671$ (42 Stellen)
- Computer: mehr als 10Millionen Stellen

Alle natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, haben in der Menge der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel. ($\sqrt{3}$ ist nicht rational, $\sqrt{4} = 2$ ist rational, $\sqrt{8}$ ist nicht rational, $\sqrt{64} = 8$ ist rational)

HA: 1. Zeige, dass $\sqrt{8}$ irrational ist.
2. Warum funktioniert der Beweis für $\sqrt{4}$ nicht?

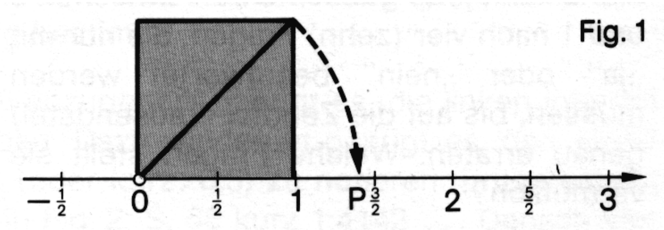
Hr. Stauff aus Würzburg: (Mathedidaktiker)
„Das Einzige, was "man" über die Wurzel aus 2 weiß (und was in der formalen Darstellung $\sqrt{2}$ so genial kodiert ist), ist doch
- einerseits, dass ihr Dezimalwert herzhaft scheißegal
- andererseits, dass ihr Quadrat erstaunlicherweise exakt (also millimetergenau) wieder 2 ergibt!“

Zur Geschichte der reellen Zahlen

- Auf baylonischen Keilschrifttafeln fand man ersten Hinweise für das Rechnen mit irrationalen Zahlen. (um 1700 v. Chr.)
  - Näherung für $\sqrt{2}$ war $\frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$
  - Den Babyloniern muß bekannt gewesen sein, daß es sich dabei nicht um einen genauen Wert handelt
  - wahrscheinlich kannten sie auch ein Verfahren, um die Genauigkeit des Wertes zu verbessern.
- Griechische Mathematik:
  - Zahl = stets eine natürliche Zahl
  - Brüche wurden nicht als Zahlen betrachtet, sondern als Verhältnisse von Zahlen
  - Man kannte auch die Diagonalen eines Quadrates.
  - *Eudoxos von Knidos* entwickelte eine Theorie, die der Irrationalzahlen sehr nahe kommt (etwa 408-355 v. Chr.)
  - Entdeckung war ein tiefer Schock für die antiken Griechen (Den Entdecker soll man während einer Seefahrt kurzerhand ins Meer geworfen haben.)

  - Erst zu Beginn der Neuzeit haben sich die Brüche und irrationalen Zahlen in der Algebra endgültig durchgesetzt.
    - *Michael Stifel* (1487-1567) und *Simon Stevin* (1548-1620) versuchen den Begriff der irrationalen Zahl durch eine genaue Definition zu klären.
    - Aber erst *Bernhard Bolzano* (1781-1848), *Richard Dedekind* (1831-1916) und *Georg Cantor* (1845-1918) gelingt es, vom heutigen Standpunkt aus befriedigende Theorien über reelle Zahlen zu entwickeln.
    - Georg Cantor bedient sich dazu der sog. Fundamentalfolgen. Für diese werden Rechenvorschriften definiert und anschließend die Rechenregeln bewiesen. Richard Dedekind definiert die reellen Zahlen mit Hilfe des Dedekindschen Schnitts. Er kommt dabei auf einem anderen Weg als Georg Cantor zu den gleichen Ergebnissen.

Zahlengerade der rationalen Zahlen
Dem Punkt P ist keine rationale Zahl zugeordnet.
Die rationale Zahlengerade hat Löcher.
Nicht an jedem Punkt steht eine rationale Zahl angeschrieben.



Auf der Zahlengeraden gibt es unendlich viele Punkte, denen keine rationale Zahlen zugeordnet sind.

Intervallschachtelungen

Wie groß ist $\sqrt{3}$?

$\sqrt{3}$ liegt zwischen	1	und	2,	weil	$1^2 < 3 < 2^2$	$(1 < 3 < 4)$
	1,7	und	1,8	weil	$1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$	$(2{,}89 < 3 < 3{,}24)$
	1,73	und	1,74	weil	$1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$	$(2{,}9929 < 3 < 3{,}0276)$
	1,732	und	1,733	weil	$1{,}732^2 < 3 < 1{,}733^2$	$(2{,}999824 < 3 < 3{,}003289)$
	1,7320	und	1,7321	weil	$1{,}7320^2 < 3 < 1{,}7321^2$	$(2{,}999824 < 3 < 3{,}00017041)$
	...					

Intervallschachtelung:			Intervalllänge:
[1	;	2]	1
[1,7	;	1,8]	0,1
[1,73	;	1,74]	0,01
[1,732	;	1,733]	0,001
[1,7320	;	1,7321]	0,0001
...	;	...	

Die (unendlich vielen) Intervalle rationaler Zahlen bilden eine Intervallschachtelung, wenn gilt:

- **Jedes Intervall ist im vorangehenden enthalten.**
- **Die Intervalllängen nehmen ab und werden beliebig klein.**

$\Rightarrow$ **Die Intervallschachtelung bestimmt auf der Zahlengeraden genau einen Punkt.**

Intervallschachtelung:			Intervalllänge:
[0	;	1]	1
[0,1	;	0,2]	0,1
[0,11	;	0,12]	0,01
[0,111	;	0,112]	0,001
[0,1111	;	0,1112]	0,0001
...	;	...	

Ist das eine Intervallschachtelung?

Welche Zahl wird durch diese Intervallschachtelung beschrieben? $\frac{1}{9} = 0{,}\bar{1}$

Unterschied zu $\sqrt{3}$? Intervallschachtelung hat ein **rationales Zentrum.**
nicht abbrechender Dezimalbruch $0{,}1111111... = 0{,}\bar{1}$ ist **periodisch.**
$\sqrt{3}$ ist nicht periodisch.

Auf der Zahlengeraden ist jedem Punkt, der nicht mit einer rationalen Zahl belegt ist, ein nicht-abbrechender und nicht-periodischer Dezimalbruch zugeordnet.
Die Menge aller Dezimalbrüche bilden die Menge der reellen Zahlen R.

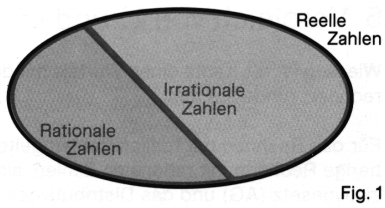


Fig. 1

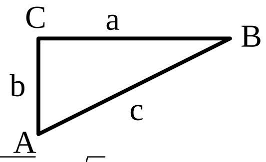
Intervallschachtelung von $\sqrt{5}$?			**Begründung**
[2	;	3]	$4 < \sqrt{5} < 9$
[2,2	;	2,3]	$4{,}84 < \sqrt{5} < 5{,}29$
[2,23	;	2,24]	$4{,}9729 < \sqrt{5} < 5{,}0176$
[2,236	;	2,237]	$4{,}999696 < \sqrt{5} < 5{,}004169$
[2,2360	;	2,2361]	$4{,}999696 < \sqrt{5} < 5{,}00014321$
...	;	...	

Wie kann man aus einem Quadrat mit dem Flächeninhalt A ein Quadrat konstruieren, dass den doppelten, 3-fachen, 4-fachen, 5-fachen, ... Flächeninhalt hat?

doppelter Flächeninhalt $\rightarrow$ siehe Sandkastenaufgabe
4-facher Flächeninhalt $\rightarrow$ das gleiche mit dem 2. Quadrat (das mit Flächeninhalt 2A)

3-facher Flächeninhalt $\rightarrow$ funktioniert erst mal nicht so

- Wie kommt man an die Seitenlänge $\sqrt{3}$ ran?
  - Konstruktion eines Quadrates mit Seitenlänge 1 liefert Diagonale $\sqrt{2}$.
  - **Satz des Pythagoras:**
    In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
    Bsp.: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$



  - $\Rightarrow$ Dreieck mit den Katheten 1 und $\sqrt{2}$, da $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

Konstruktion der Streckenlängen $\sqrt{n}$:

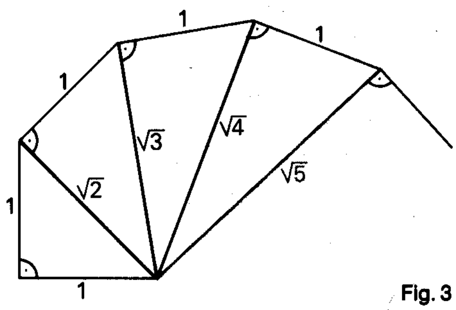
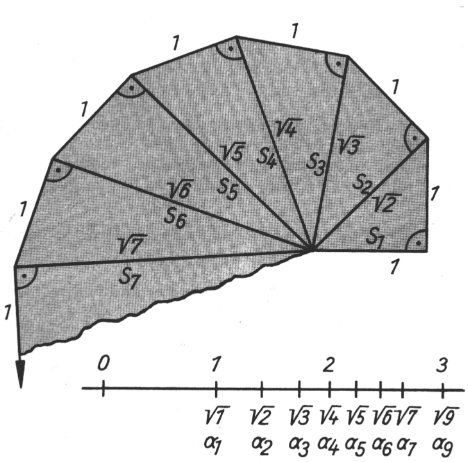


Fig. 3



Standardbeweis:

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational (nicht rational)

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit p, q ∈ N und q ≥ 2 (echter Bruch)

Der Bruch $\frac{p}{q}$ sei vollständig gekürzt.

(p und q haben keinen gemeinsamen Teiler.)

Beweis: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

⇒ $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (Quadrieren, Potenzgesetz Div mit gl. Exp.)

⇒ $p^2 = 2q^2$

⇒ 2 ist ein Teiler von p^2 (p^2 ist durch 2 teilbar, p^2 ist gerade)

⇒ 2 ist Teiler von p (p ist durch 2 teilbar, p ist gerade)

⇒ p ist darstellbar als $p = 2n$ mit n∈ N

⇒ $(2n)^2 = 2q^2$

⇒ $4n^2 = 2q^2$

⇒ $2n^2 = q^2$

⇒ 2 ist ein Teiler von q^2 (q^2 ist durch 2 teilbar, q^2 ist gerade)

⇒ 2 ist ein Teiler von q (q ist durch 2 teilbar, q ist gerade)

⇒ p und q haben den gemeinsamen Teiler 2

⇒ Widerspruch zur Annahme, dass $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt sei.

<u>Nebenrechnung:</u>

gerade Zahl: 2m m∈ N

$(2m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot (2m^2)$

ungerade Zahl: 2m + 1

$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$

$= 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1$

Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade. Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade.

⇒ Annahme kann nicht stimmen

⇒ $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.