

Monotonie von Zahlenfolgen

Definition: (a_n) sei eine Zahlenfolge.

- (a_n) heißt **monoton wachsend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \leq a_{n+1}$
- (a_n) heißt **streng monoton wachsend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$
- (a_n) heißt **monoton fallend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n \geq a_{n+1}$
- (a_n) heißt **streng monoton fallend** genau dann, wenn für jedes n gilt: $a_n > a_{n+1}$

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **konstant**, wenn für jedes n gilt: $a_n = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **alternierend** genau dann, wenn das Vorzeichen von Folgeglied zu Folgeglied wechselt.

Eine **konstante** Zahlenfolge ist

| | |
|--------------|-------------------------|
| X | monoton wachsend |
| nicht | streng monoton wachsend |
| X | monoton fallend |
| nicht | streng monoton fallend |
| nicht | alternierend |

Eine **alternierende** Zahlenfolge ist

| | |
|--------------|-------------------------|
| nicht | monoton wachsend |
| nicht | streng monoton wachsend |
| nicht | monoton fallend |
| nicht | streng monoton fallend |
| nicht | konstant |

Eine **arithmetische** Zahlenfolge ist

| | | |
|-------------------------|-------------------|------------------------------|
| streng monoton wachsend | \Leftrightarrow | $d > 0$ |
| streng monoton fallend | \Leftrightarrow | $d < 0$ |
| konstant | \Leftrightarrow | $d = 0$ |
| alternierend | \Leftrightarrow | - |

Eine **geometrische** Zahlenfolge ist

| | | | | |
|-------------------------|-------------------|--|--------------|---|
| streng monoton wachsend | \Leftrightarrow | $a_1 > 0$ und $q > 1$ | oder | $a_1 < 0$ und $0 < q < 1$ |
| streng monoton fallend | \Leftrightarrow | $a_1 < 0$ und $q > 1$ | oder | $a_1 > 0$ und $0 < q < 1$ |
| konstant | \Leftrightarrow | $q = 1$ | (oder | $a_1 = 0$) |
| alternierend | \Leftrightarrow | $q < 0$ | | |

Berechnung der Monotonie

| Die Zahlenfolge (a_n) ist | | | | |
|---|---|---|---|---|
| monoton wachsend | streng monoton wachsend | monoton fallend | streng monoton fallend | alternierend |
| genau dann, wenn für alle n gilt: | | | | |
| $a_n \leq a_{n+1}$ | $a_n < a_{n+1}$ | $a_n \geq a_{n+1}$ | $a_n > a_{n+1}$ | Vorzeichen wechselt von Folgeglied zu Folgeglied |
| $a_{n+1} - a_n \geq 0$ | $a_{n+1} - a_n > 0$ | $a_{n+1} - a_n \leq 0$ | $a_{n+1} - a_n < 0$ | $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ |
| $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (falls alle $a_n > 0$) | $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (falls alle $a_n > 0$) | $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ (falls alle $a_n > 0$) | $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (falls alle $a_n > 0$) | |